Aufgabe 9. Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

- Ein Element $a \in M$ heißt *Maximum* (oder *größtes Element*), wenn gilt:
$$\forall x \in M : \; x \leq a.$$
- Ein Element $a \in M$ heißt *maximal*, wenn gilt:
$$\forall x \in M : \; x \geq a \Rightarrow x = a.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes Maximum von M auch ein maximales Element ist.

(b) Beweisen, Sie: Ist m ein Maximum von M und $a \in M$ ein maximales Element, so gilt $a = m$. Insbesondere ist das Maximum einer Menge eindeutig bestimmt (sofern es existiert).

(c) Geben Sie analoge Definitionen für Minimum und minimale Elemente und beweisen Sie die (a) bzw. (b) entsprechenden Eigenschaften.

(d) Veranschaulichen Sie die Teilbarkeitsrelation auf den Mengen $T(12) \cap T(18)$, $T(12) \setminus \{12\}$, und $T(54) \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie Maxima/Minima und maximale/minimale Elemente.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt:

(a) $\mathrm{ggT}(3a + 1, 7a + 2) = 1$.

(b) $\mathrm{ggT}(7a + 4, 9a + 5) = 1$.

(c) $\mathrm{ggT}(3a, 3a + 2) = 1$, falls a ungerade ist.

Aufgabe 11. Beweisen Sie, dass für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) Es gibt dann und nur dann $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $c = ax + by$, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$.

(b) Sind a, b nicht beide 0, und $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by = \mathrm{ggT}(a, b)$, so gilt $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$.

Aufgabe 12. Sei $M := \{ 7n + 1 : n \in \mathbb{N}_0 \} = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, \ldots\}$. Für $a, b \in M$ definieren wir eine Teilbarkeitsrelation $|_M$, analog zur Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$, durch
$$a \mid_M b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists m \in M : \; b = am.$$
Für $a \in M$ sei
$$T_M(a) := \{ b \in M : b \mid_M a \}.$$
Man zeige:

(a) M is multiplikativ abgeschlossen, d.h., für alle $a, b \in M$ ist auch $ab \in M$.

(b) Für $a, b \in M$ gilt $a \mid_M b \Leftrightarrow a \mid b$ und deshalb $T_M(a) = T(a) \cap M$. (Hier bezieht sich $|$ auf die Teilbarkeitsrelation in $\mathbb{Z}$.)

(c) Bestimmen Sie $T_M(288)$, $T_M(1800)$ und $T_M(288) \cap T_M(1800)$. Schließen Sie, dass $T_M(288) \cap T_M(1800)$ bezüglich der Teilbarkeitsrelation $|_M$ kein Maximum besitzt.