Aufgabe 5. Bestimmen Sie $T(280)$ und $T(60)$. Bestimmen Sie weiters $\mathrm{ggT}(280, 60)$ direkt mit Hilfe der Definition des größten gemeinsamen Teilers.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie $T(n)$ aus $\{\, d \in \mathbb{N}_0 : d \mid n,\ d \leq \sqrt{n}\,\}$ bestimmen können.

Aufgabe 6. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (Beweis oder Gegenbeispiel)?

(a) $a \mid b + c \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ oder $a \mid c$.

(b) $a \mid b$ und $a \mid c \quad \Rightarrow \quad a^2 \mid bc$.

(c) $a \mid bc \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ oder $a \mid c$.

Aufgabe 7. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n-1}) = 1$ für $n \geq 1$.

(b) $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$ für $m \geq 0, n \geq 1$.

(c) Aus $m \mid n$ folgt $F_m \mid F_n$ für $m, n \geq 0$.

Hinweis: Induktion. Für Teil (c) ist (b) hilfreich.

Aufgabe 8. Man beweise, dass der Ausdruck

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für jedes $n \geq 1$ eine ganze Zahl ergibt.

Hinweis: Nach dem Satz über die Division mit Rest besitzt n genau eine der sechs Formen $6k + r$ mit $r \in [0, 5]$. Man betrachte jeden dieser Fälle.