Wir besprechen eine Auswahl der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 42. Eine (reell)-quadratische Irrationalzahl lässt sich in der Form $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, b > 0$ darstellen, wobei b keine Quadratzahl ist. Schreiben Sie ein Computerprogramm, welches als Eingabe ein derartiges Tripel (a, b, c) nimmt und als Ausgabe die Kettenbruchentwicklung von α produziert (z.B. indem das Programm die Vorperiode- und Periode als zwei separate Arrays/Listen ausgibt).

Die Wahl der Programmiersprache bleibt Ihnen überlassen. Alle Berechnungen sollen exakt (d.h. ohne Gleitkommarechnung) erfolgen.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklungen der folgenden Zahlen

- (a) $\sqrt{23}$,
- (b) $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$,
- (c) $\frac{4-\sqrt{11}}{3}$.

Aufgabe 44. Zeigen Sie:

- (a) Seien $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und $\frac{p_n}{q_n}$ zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche einer Zahl α . Dann gilt für zumindest einen dieser Näherungsbrüche $\frac{p}{q}$ die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

- (b) Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.
- (c) Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gibt es höchstens endlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Aufgabe 45. Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und sei d keine Quadratzahl. Sei

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit Basis $(1, \sqrt{d})$.
- (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.
- (c) Es gibt einen Körperautomorphismus $\sigma: \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt $\sigma(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$.
- (d) Sei $f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$ ein quadratisches Polynom mit Diskriminante $d = b^2 - 4ac$, so dass d keine Quadratzahl ist (bzw. äquivalent dazu, dass f keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ besitzt). Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $f = a(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha))$.