Wir besprechen eine Auswahl der folgenden Aufgaben (bzw. eventuell noch offener Aufgaben).

Aufgabe 38. Zeigen Sie: Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $(q_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Näherungsnenner von α, so gilt $q_n \geq F_n$ für $n \geq 0$. (Hierbei ist F_n die n-te Fibonaccizahl.)

Aufgabe 39. Berechnen sie die ersten vier Näherungsbrüche $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ von $\pi = 3,1415926\ldots$

Aufgabe 40. (a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{18}$.

(b) Zeigen Sie: Für $d \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{d^2+1} = [d; 2d, 2d, \ldots] = [d, \overline{2d}]$.

Aufgabe 41. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, und seien $p_{-2}, p_{-1}, \ldots, p_n$ die der Folge $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ zugehörgen Näherungszähler. Wir nennen $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ein *Palindrom*, wenn gilt $a_i = a_{n-i}$ für $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt
$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0].$$

(b) Sei $z = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a \geq b$. Sei $z = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ eine Kettenbruchdarstellung von z. Zeigen Sie: $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ist genau dann ein Palindrom, wenn gilt $a \mid (b^2 + (-1)^{n-1})$.