Wir besprechen eine Auswahl der folgenden Aufgaben (bzw. eventuell noch offener Aufgaben).

Aufgabe 32. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi(n)$ die Eulersche Phi-Funktion und $\tau(n)$ die Teileranzahlfunktion (d.h. $\tau(n) = |\{\, d \in \mathbb{N} : d \mid n \,\}|$). Dann sind

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n!} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n!}$$

irrational.

Aufgabe 33. Seien $(a_i)_{i\geq 0}$, $(p_i)_{i\geq -2}$ und $(q_i)_{i\geq -2}$ wie in Definition 3.1. Zeigen Sie: für alle $n \geq -1$ gilt

$$P_n := \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und $\det(P_n) = (-1)^{n+1}$.

Aufgabe 34. Beweisen Sie Lemma 3.3(2).

Aufgabe 35. (a) Drücken Sie folgende rationale Zahlen als Kettenbrüche aus:

$$\frac{-19}{51}, \qquad \frac{71}{55}, \qquad \frac{118}{303}.$$

(b) Welche rationalen Zahlen werden durch folgende Kettenbrüche dargestellt?

$$[1; 2, 3, 3, 2, 1], \qquad [-3; 1, 1, 1, 1, 3], \qquad [0; 2, 4, 1, 8, 2].$$

Aufgabe 36. Berechnen Sie die Näherungsbrüche von $[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ und vergleichen Sie diese mit der Aussage von Proposition 3.4.

Aufgabe 37. Sei $r > 1$ eine rationale Zahl mit Kettenbruchdarstellung $r = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$. Zeigen Sie, dass eine Kettenbruchdarstellung von $1/r$ durch $1/r = [0; a_0, a_1, \ldots, a_k]$ gegeben ist.