Wir besprechen Aufgabe 21 und eine Auswahl der folgenden Aufgaben.

Ist $a = \sum_{i=0}^{k} a_i g^i$ mit $a_i \in S_g$ die g-adische Darstellung einer natürlichen Zahl a, so schreiben wir dafür kurz $(a_k a_{k-1} a_{k-1} \dots a_1 a_0)_g$, bzw. wie üblich $a_k a_{k-1} \cdots a_0$ falls $g = 10$ (analog für reelle Zahlen $x \in [0, 1)$).

Aufgabe 24. Bestimmen Sie die g-adischen Darstellungen der folgenden Zahlen a.

(a) $a = 40522$ für $g = 5$, $g = 16$

(b) $a = (210121)_3$ für $g = 10$

(c) $a = (12340)_5$ für $g = 2$

(d) $a = 1/10$ für $g = 2$

(e) $a = 1/18$ für $g = 6$

Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ genau eine Darstellung der Form

$$a = \sum_{n=1}^{k} a_n \, n!$$

besitzt, wobei $k \geq 1$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ und $0 \leq a_n \leq n$ für $1 \leq n \leq k$ gelten. ($n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.)

Aufgabe 26. Bestimmen Sie alle $g \geq 2$, so dass die Zahl $(11111)_g$ eine Quadratzahl ist. (Hinweis bei Bedarf auf Nachfrage.)

Aufgabe 27 (Satz von Zeckendorf). Die Folge der Fibonacci-Zahlen F_n ist rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

(a) Jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt eine Darstellung der Form

$$a = \sum_{n=1}^{k} c_n F_n \tag{1}$$

mit $k \geq 1$, $c_1, \dots, c_k \in \{0, 1\}$ und $c_i c_{i+1} = 0$ für alle $1 \leq i < k$. (D.h. jede Zahl lässt sich als Summe paarweise verschiedener Fibonacchi-Zahlen schreiben, wobei in der Summe keine zwei aufeinanderfolgenden Fibonacchi-Zahlen vorkommen.)

(b) Ist a eine Summe wie in (1), so gilt $a < F_{k+1}$.

(c) Die Darstellung in (a) ist eindeutig.