Aufgabe 15. Sei $D := \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j \cong \mathbb{R}^3$ eine dreidimensionale $\mathbb{R}$-Algebra mit einer fest gewählten Basis 1, i, j. Sei weiters $i^2 = -1$. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass D dann kein Divisionsring sein kann:

(a) Multiplizieren Sie $ij = a + bi + cj$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) von links mit i und leiten Sie einen Widerspruch her.

(b) D ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und hat deshalb als $\mathbb{R}$-Vektorraum gerade Dimension (Widerspruch).

Aufgabe 16. Sei

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) D bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen eine 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Divisionsalgebra (d.h. einen Divisionsring der auch gleichzeitig eine 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra ist).

(b) D ist isomorph zu $\mathbb{H}$.

Bonus: Können Sie die Konjugation bzw. die reduzierte Norm $x \mapsto x\overline{x} = \overline{x}x$ auf D durch Konzepte der linearen Algebra ausdrücken?

Aufgabe 17. Sei

$$\mathbb{H}^0 := \{ x = bi + cj + dk \in \mathbb{H} : b, c, d \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{H} : \overline{x} + x = 0 \}.$$

der dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der *reinen Quaternionen*. Zeigen Sie folgende Aussagen für alle $x, y \in \mathbb{H}^0$:

(a) Es gilt $xy = -\langle x, y \rangle + x \times y$, wenn Sie $\mathbb{H}^0$ in geeigneter Weise mit $\mathbb{R}^3$ identifizieren und $\times$ das Kreuzprodukt bezeichnet.

(b) $xy \in \mathbb{H}^0 \Leftrightarrow x, y$ sind orthogonal $\Leftrightarrow xy = -yx$.

(c) $x^2 = -b^2 - c^2 - d^2$, wenn $x = bi + cj + dk$ mit $b, c, d \in \mathbb{R}$.