Aufgabe 13. Benutzen Sie die Identität $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$ und Eigenschaften der komplexen Zahlen, um die folgenden Identitäten aus der Trigonometrie zu beweisen (für $x, y \in \mathbb{R}$):

(a) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$.

(b) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$.

(c) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

(d) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$.

Aufgabe 14. Sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Zeigen Sie:

(a) K bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper.

(b) K ist isomorph zu $\mathbb{C}$.

Können Sie die komplexe Konjugation bzw. den Absolutbetrag auf K durch Konzepte der linearen Algebra ausdrücken?

Wir besprechen außerdem noch **Aufgabe 12**. Zwei Hinweise zu Aufgabe 12(c):

- Zeigen Sie zuerst: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ und $b \in \mathbb{Q} \setminus A$, so dass gilt $\frac{a}{b} < 1 + \varepsilon$. (Aufgabe 11 ist hilfreich.)
- Eine Strategie analog des Beweises von $0_{\mathbb{R}} \subseteq A + (-A)$ aus der VO ist nützlich.