Aufgabe 9. Ist p eine Primzahl, so ist gibt es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = p$.

Aufgabe 10. Sei K ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für alle $a, b \in K$ gelten.

(a) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow -a < -b$.

(b) Ist $a \neq 0$, so ist $0 < a^2$. Es gilt $0 < 1$.

(c) Ist $c \in K$ mit $c > 0$, so gilt $a < b \Rightarrow ac < bc$.

(d) Sind $a_1, \ldots, a_n \in K$, so gilt $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(e) $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper.

Aufgabe 11. Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ eine Oberklasse und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Zeigen Sie, dass es $a \in A$ und $b \in \mathbb{Q} \setminus A$ gibt, so dass gilt $a - b < \varepsilon$.

Aufgabe 12. Eine Oberklasse $A \subseteq \mathbb{Q}$ ist *positiv*, wenn gilt $A > 0$, d.h., $A \subsetneq \mathbb{Q}_{>0}$. Wir definieren dann

$$A^{-1} := \left\{ \frac{1}{q} \;:\; q \in \widehat{A} \cap \mathbb{Q}_{>0} \right\}$$

Sei $A \subseteq \mathbb{Q}_{>0}$ eine positive Oberklasse. Zeigen Sie:

(a) $A^{\downarrow} \cap \mathbb{Q}_{>0} \neq \emptyset$ und $\widehat{A} \cap \mathbb{Q}_{>0} \neq \emptyset$.

(b) A^{-1} ist eine Oberklasse.

(c) Es gilt $A \cdot A^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$.

Hinweis: Falls nötig können Sie sich an Schichl, Steinbauer: Einführung in das mathematische Arbeiten, 2. Aufl, S. 333–334 orientieren.