Aufgabe 1. Berechnen Sie $3+3$, $3 \cdot 2$ und $2 \cdot 3$ durch Zurückführen auf die Peanoaxiome und die Definitionen von Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie mit Hilfe der Peanoaxiome die folgenden Rechenregeln für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$.

(a) $0 + a = a$; (*Hinweis:* Induktion (P3) nach a.)

(b) $a + 1 = S(a)$; (*Hinweis:* Induktion nach a.)

(c) $S(a) + b = S(a + b)$; (*Hinweis:* Induktion nach b bei festem a.)

(d) $a + b = b + a$. (*Hinweis:* Induktion nach b bei festem a; benutze (c).)

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit Hilfe der Peanoaxiome die folgenden Rechenregeln für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass bereits bekannt ist, dass $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ein kommutatives Monoid ist.

(a) $1 \cdot a = a$.

(b) $(a + b)c = ac + bc$.

(c) $a(bc) = (ab)c$. (Sie dürfen hier voraussetzen, dass die Distributivgesetze gelten)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass durch die Relation

$$a \leq b \;:\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}_0 : b = a + n$$

eine Totalordnung auf $\mathbb{N}_0$ definiert wird. Beweisen Sie weiters:

(a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.