# Orthogonalität

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

**Def:** Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

(1) $v, w \in V$ heißen orthogonal wenn gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

Schreibweise: $v \perp w$.

(2) Ein Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ in $V$ heißt orthogonal wenn für alle $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:
$v_i \perp v_j$.

(Man sagt auch: Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal.)

- $(v_1, \dots, v_n)$ ist orthonormal wenn zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.
- $(v_1, \dots, v_n)$ heißt Orthogonalbasis [Orthonormalbasis], wenn $(v_1, \dots, v_n)$ eine orthogonale [orthonormierte] (geordnete) Basis von $V$ ist.

(3) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt orthogonal, wenn für alle $v, w \in M$ mit $v \neq w$ gilt: $v \perp w$.

$M$ heißt orthonormal, wenn weiters $\|v\| = 1$ für alle $v \in M$ gilt.

— " — Orthogonalbasis [Orthonormalbasis], wenn $M$ orthogonal [orthonormal] und eine Basis von $V$ ist.

**Bsp:**
- $\forall v \in V: \langle v, 0\rangle = 0$ d.h. $v \perp 0$
  $\forall v \in V\setminus\{0\}: \langle v, v\rangle > 0$ d.h. $v \perp v \iff v = 0$
- $\forall v, w \in V,\ \lambda, \mu \in K\setminus\{0\}: \langle \lambda v, \mu w\rangle = \overline{\lambda}\mu\langle v, w\rangle$ d.h. $v \perp w \iff \lambda v \perp \mu w$

- $\mathbb{C}^n / \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt: $\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j. \end{cases}$

$\Longrightarrow (e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis [ONB].

- Sei $V$ der $\mathbb{C}$-VR $C_{\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ und $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$: $f_n(x) = a_n e^{inx}$ $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{a_n}\, \cancel{e^{-inx}}\, a_n \cancel{e^{inx}}\, dx = \int_0^{2\pi} |a_n|^2\, dx = 2\pi |a_n|^2.$$

$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ y \mapsto e^{iy} \end{array}\right.$ ist $2\pi$ periodisch

$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$

Wähle $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, d.h. $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$.

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$:

$$\langle f_m, f_n\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = (*)$$

$(*) = 0$ $\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist also orthonormal

**Satz** Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(1) Ist $(v_1,\dots,v_n)$ in $V$ orthogonal und $v_i\neq 0$ für alle $i$, so ist $(v_1,\dots,v_n)$ linear unabhängig.

(2) Ist $(v_1,\dots,v_n)$ in $V$ orthogonal und $v_i\neq 0$ für alle $i$, so ist

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\dots,\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$$

orthonormal.

**Beweis:** (1) Sei $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n=0$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$. $\underline{\text{z.z.}}$: $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$.

Sei $i\in\{1,\dots,n\}$.
$$0=\langle v_i,\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n\rangle=\lambda_1\langle v_i,v_1\rangle+\dots+\lambda_n\langle v_i,v_n\rangle$$
$$\underset{\langle v_i,v_j\rangle=0 \text{ für } j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}{=}\lambda_i\langle v_i,v_i\rangle=\lambda_i\underbrace{\|v_i\|^2}_{>0}\Longrightarrow\lambda_i=0.$$

$\Longrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$

(2) $\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\|=\frac{1}{\|v_i\|}\|v_i\|=1$ ✓ $\quad\left\langle\frac{v_i}{\|v_i\|},\frac{v_j}{\|v_j\|}\right\rangle=\frac{1}{\|v_i\|}\frac{1}{\|v_j\|}\langle v_i,v_j\rangle=0 \quad (i\neq j)$

**Bem:** Die entsprechenden Aussagen gelten auch für eine orthogonale Menge $M\subseteq V\setminus\{0\}$.

**Proposition** Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ und $v \in V$, so gilt

$$v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \dots + \langle b_n, v\rangle b_n.$$

D.h. der Koordinatenvektor von $v$ bezüglich $B$ ist $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

Achtung: $\langle b_i, v\rangle = \overline{\langle v, b_i\rangle}$

**Beweis:** Sei $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

z.z.: $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \lambda_i = \langle b_i, v\rangle$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n\rangle = \lambda_1 \langle b_i, b_1\rangle + \dots + \lambda_n \langle b_i, b_n\rangle$$

$$= \lambda_i \langle b_i, b_i\rangle = \lambda_i \underbrace{\|b_i\|^2}_{=1} = \lambda_i$$

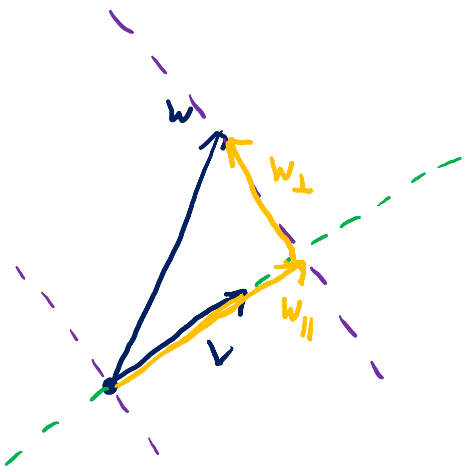
$\square$

Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, und $0 \neq v \in V$.

Beh: Jeder Vektor $w \in V$ lässt sich schreiben als

$$w = w_\parallel + w_\perp \quad \text{mit} \quad w_\parallel = \lambda v \quad (\lambda \in K) \quad \text{und} \quad \langle w_\perp, v\rangle = 0.$$

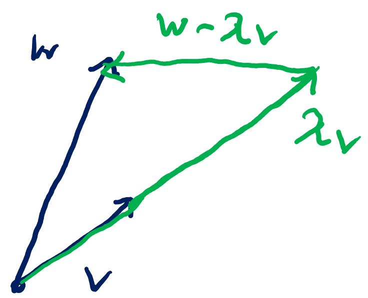
("orthogonale Zerlegung des Vektors $w$ bezüglich $v$")




Ansatz: $w = \lambda v + (w - \lambda v)$ mit $\lambda \in K$

$$0 = \langle v, w - \lambda v\rangle = \langle v, w\rangle - \lambda \langle v, v\rangle$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}.$$




Dann: $w = \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2} v}_{= w_\parallel} + \underbrace{\left(w - \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2} v\right)}_{w_\perp}$

Geschickt: $\|v\| = 1$:

$$w = \langle v, w\rangle v + (w - \langle v, w\rangle v)$$

**Def:** Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $v \in V$ und $A, B \subseteq V$ Teilmengen.

(1) $v$ steht orthogonal auf die Menge $A$ ($v \perp A$), wenn gilt

$v \perp a$ für alle $a \in A$.

(2) $A$ steht orthogonal auf die Menge $B$ ($A \perp B$), wenn gilt

$a \perp b$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

**Lemma:** Sei $U$ ein $K$-VR, und $V, W$ seien Unterräume mit Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$.

Dann ist $V \perp W \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}\ \forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad v_i \perp w_j$

**Beweis:** „$\Rightarrow$" ✓

„$\Leftarrow$" Sei $v \in V$, $w \in W$. zz: $v \perp w$

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \qquad w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \qquad \alpha_i, \beta_i \in K$$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \beta_j \underbrace{\langle v_i, w_j \rangle}_{=0} = 0 \qquad \square$$

**Satz** (Orthonormalisierungssatz von Gram und Schmidt)

Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $(v_1, \dots, v_n) \in V$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormales Tupel $(w_1, \dots, w_n)$ so dass für alle $k = 1, \dots, n$ die folgenden linearen Hüllen gleich sind:

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k).$$

Ist $0 \leq m \leq n$, so dass $(v_1, \dots, v_m)$ orthonormal ist, so kann $w_i = v_i$ für $1 \leq i \leq m$ gewählt werden.

**Korollar** Sei $\dim V < \infty$

(1) Ist $W \subseteq V$ ein UR mit ONB $(w_1, \dots, w_m)$, so kann diese zu einer ONB $(w_1, \dots, w_m, \dots, w_n)$ von $V$ erweitert werden.

(2) Jeder endlich-dimensionale Innere-Produkt-Raum besitzt eine Orthonormalbasis.

**Beweis:** (1) Seien $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ so, dass $B = (w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von $V$ bildet. Man wende den Satz auf $B$ an.

(2) Satz auf eine beliebige Basis von $V$ anwenden.

**Satz** (Orthonormalisierungssatz von Gram und Schmidt)

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $(v_1,\dots,v_n)\in V$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormales Tupel $(w_1,\dots,w_n)$ so dass für alle $k=1,\dots,n$ die folgenden linearen Hüllen gleich sind:

$$\mathcal{L}(v_1,\dots,v_k)=\mathcal{L}(w_1,\dots,w_k).$$

Ist $0\leq m\leq n$, so dass $(v_1,\dots,v_m)$ orthonormal ist, so kann $w_i=v_i$ für $1\leq i\leq m$ gewählt werden.

**Beweis:** Induktion nach $n$: $n=0$ ✓

$n=1$: $v_1$ lin. unabh. $\Rightarrow$ $v_1\neq 0$ $\Rightarrow$ $\|v_1\|\neq 0$ $\quad w_1:=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

$n\geq 2$, $n-1\to n$: Sei $(w_1,\dots,w_{n-1})$ orthonormal und $\mathcal{L}(v_1,\dots,v_k)=\mathcal{L}(w_1,\dots,w_k)$ für $k\in\{1,\dots,n-1\}$

$$\tilde{v}_n := \langle w_1,v_n\rangle w_1+\dots+\langle w_{n-1},v_n\rangle w_{n-1}$$

$$\forall i\in\{1,\dots,n-1\}:\quad \langle w_i, v_n-\tilde{v}_n\rangle=\langle w_i,v_n\rangle-\langle w_i,\tilde{v}_n\rangle=\langle w_i,v_n\rangle-\langle w_i,\sum_{j=1}^{n-1}\langle w_j,v_n\rangle w_j\rangle=$$

$$=\langle w_i,v_n\rangle-\sum_{j=1}^{n-1}\langle w_j,v_n\rangle\langle w_i,w_j\rangle=\langle w_i,v_n\rangle-\langle w_i,v_n\rangle\underbrace{\langle w_i,w_i\rangle}_{=1}=0$$

$\Rightarrow$ $(w_1,\dots,w_{n-1},v_n-\tilde{v}_n)$ orthogonal.

Wegen $v_n\notin\mathcal{L}(v_1,\dots,v_{n-1})=\mathcal{L}(w_1,\dots,w_{n-1})$ $\Rightarrow$ $v_n\neq\tilde{v}_n$

Mit $w_n=\dfrac{v_n-\tilde{v}_n}{\|v_n-\tilde{v}_n\|}$ ist $(w_1,\dots,w_n)$ orthonormal.

Satz (Orthonormalisierungssatz von Gram und Schmidt)
Sei $V$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Sei $(v_1,\dots,v_n) \in V$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormales Tupel $(w_1,\dots,w_n)$ so dass für alle $k=1,\dots,n$ die folgenden linearen Hüllen gleich sind:

$$\mathcal{L}(v_1,\dots,v_k) = \mathcal{L}(w_1,\dots,w_k).$$

Ist $0 \leq m \leq n$, so dass $(v_1,\dots,v_m)$ orthonormal ist, so kann $w_i = v_i$ für $1 \leq i \leq m$ gewählt werden.

$$\tilde{v}_n = \langle w_1, v_n \rangle w_1 + \dots + \langle w_{n-1}, v_n \rangle w_{n-1}$$

$$w_n = \frac{v_n - \tilde{v}_n}{\|v_n - \tilde{v}_n\|}.$$

$(w_1,\dots,w_n)$ ist orthonormal

$\mathcal{L}(w_1,\dots,w_k) = \mathcal{L}(v_1,\dots,v_k)$ für $k \in \{1,\dots,n-1\}$

ZZ: $\mathcal{L}(v_1,\dots,v_n) = \mathcal{L}(w_1,\dots,w_n)$

„$\supseteq$": $w_1,\dots,w_{n-1} \in \mathcal{L}(v_1,\dots,v_{n-1},v_n)$

$$w_n = \frac{v_n - \tilde{v}_n}{\|v_n - \tilde{v}_n\|} \in \mathcal{L}(v_n,\tilde{v}_n) \subseteq \mathcal{L}(v_n, w_1,\dots,w_{n-1}) \subseteq \mathcal{L}(v_n, v_1,\dots,v_{n-1}).$$

„$\subseteq$": $v_1,\dots,v_{n-1} \in \mathcal{L}(w_1,\dots,w_{n-1},w_n)$

$$v_n = \|v_n - \tilde{v}_n\| w_n + \tilde{v}_n \in \mathcal{L}(w_1,\dots,w_n).$$

$\square$

Der Beweis liefert ein Verfahren um aus $(v_1, \dots, v_n)$ ein Orthonormalsystem zu berechnen!

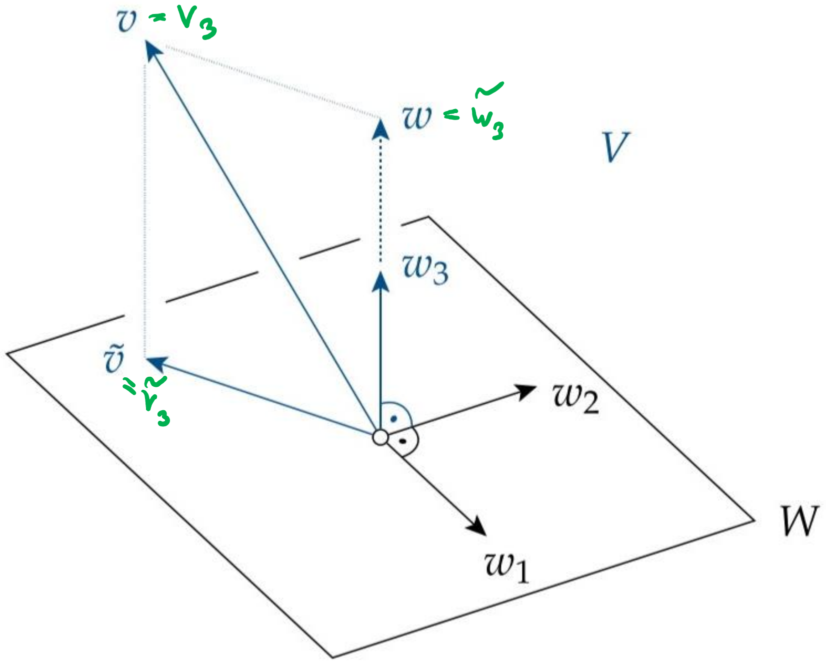
$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{w}_2 := v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1 \qquad w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

$$\tilde{w}_3 := v_3 - \underbrace{\langle w_1, v_3 \rangle w_1 - \langle w_2, v_3 \rangle w_2}_{= \tilde{v}_3} \qquad w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|w_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_i = v_i - \underbrace{\langle w_1, v_i \rangle w_1 - \dots - \langle w_{i-1}, v_i \rangle w_{i-1}}_{\tilde{v}_i} \\ w_i := \dfrac{\tilde{w}_i}{\|w_i\|} \end{cases}$$



Bem: Um nicht ständig eine Quadratwurzel ziehen zu müssen, kann man mit einer Variante zuerst eine Orthogonalbasis berechnen und diese zum Schluss normieren.

$$w_1 := v_1$$

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$\vdots$$

$$w_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle w_j, v_i \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

$\Rightarrow$ $(w_1, \dots, w_n)$ ist orthogonal

$\Rightarrow$ $\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right)$ ist orthonormal.

## Beispiel: (Legendre-Polynome)

$$V_n = \{ f: [-1,1] \to \mathbb{R} : \exists F \in \mathbb{R}[X]: f = \tilde{F}|_{[-1,1]}, \deg(F) \leq n \} \subseteq C([-1,1])$$

$\mathbb{R}$-Vektorraum von Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ auf $\mathbb{R}$, eingeschränkt auf das Intervall $[-1,1]$

$$f(x) = \alpha_0 1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

$$\left.\begin{array}{l} v_0(x) = 1 \\ v_1(x) = x \\ v_2(x) = x^2 \\ \vdots \\ v_n(x) = x^n \end{array}\right\} \text{Monome bilden Basis des } V_n$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

$$w_0(x) = \frac{v_0(x)}{\|v_0\|} \qquad \|v_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\tilde{w}_1(x) = v_1(x) - \langle w_0, v_1 \rangle w_0(x) = x \quad \Rightarrow w_1(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, x$$

$$\langle w_0, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0 \qquad \|\tilde{w}_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$w_3(x) = \ldots = \sqrt{\frac{45}{8}} \left( x^2 - \frac{1}{8} \right)$$

$$w_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \underbrace{P_n(x)}_{\text{n-tes Legendre Polynom}}$$

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

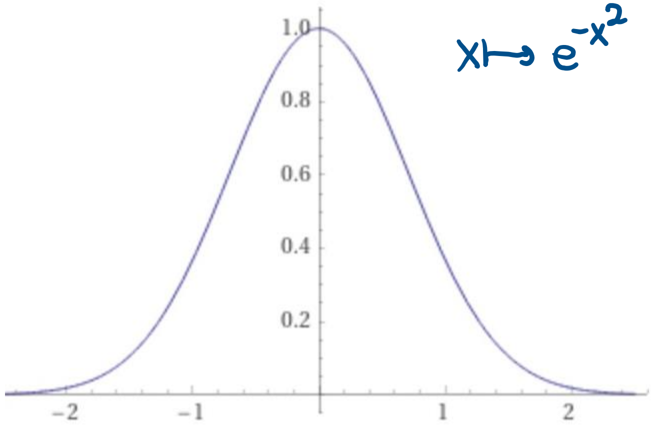
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15)$

$\vdots$

Beispiel (Hermite-Polynome)

$V = \{\tilde{F} : F \in \mathbb{R}[X]\} \subseteq C(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-VR aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}\, dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$




Monome $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ bilden eine Basis.

Orthogonalisierung führt zu Hermite-Polynomen:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

$\vdots$

$$\langle H_n, H_m \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$