

Zusammenfassung: Normalformen

Ist X eine Menge und $\sim \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X , so bezeichnet man ein ausgezeichnetes Repräsentationssystem von $\sim$, das üblicherweise besonders günstige Eigenschaften besitzt, üblicherweise als Normalform.

Besitzt man ein Verfahren um ein Element $x \in X$ in Normalform überzuführen, so kann man damit z.B. entscheiden ob $x \sim y$ für $x, y \in X$ gilt.

Bsp: • Äquivalenz von Matrizen: $X = M_{m \times n}(K)$

$$\forall A, B \in M_{m \times n}(K): A \sim B \Leftrightarrow \exists S \in GL_m(K), T \in GL_n(K): A = SBT.$$

Normalform:

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

mit $r = \text{rang}(A)$
($A_r \in M_{m \times n}(K)$)

Invariante: $r = \text{rang}(A)$

- Ähnlichkeit von Matrizen: $X = M_{n \times n}(K)$, $\forall A, B \in M_n(K): A \sim B \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(K): A = SBS^{-1}$.

$K = \mathbb{C}$: (bzw. allgemeiner: K algebraisch abgeschlossen)

Normalform: Jordansche Normalform.

$$\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \swarrow & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_g} \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \swarrow & \vdots \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{r_i \times r_i}(K) \quad (\text{bis auf Umordnung})$$

Invarianten: Eigenwerte λ_i , sowie ~~Anzahl~~, Vielfachheit und Größe der Jordanblöcke
(auch: alg. und geom. Vielfachheit der EW, char. Polynom, Determinante, Spur, ...)

K nicht algebraisch abgeschlossen (z.B.: $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

→ Rationale Normalform (= Frobeniusnormalform)

ODER Weierstraß Normalform.

INNERES PRODUKT

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist $\bar{z} = a - bi$.

Def: Sei V ein K -VR. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ heißt ein **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf V , wenn gilt:

$$(I1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \textbf{sesquilinear}, \text{ d.h. } \forall u, v, w \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K: \begin{aligned} \langle \lambda u + \mu v, w \rangle &= \bar{\lambda} \langle u, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w \rangle \\ \langle u, \lambda v + \mu w \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

$$(I2) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \textbf{hermitesch}, \text{ d.h. } \forall v, w \in V: \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

$$(I3) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \textbf{positiv definit}, \text{ d.h. } \forall v \in V: \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ und } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Bem: (i) $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$, weswegen (I3) sinnvoll ist.

(ii) ist $K = \mathbb{R}$, so fällt die komplexe Konjugation weg.

$$(I1) \text{ vereinfacht sich zu: } \left. \begin{aligned} \langle \lambda u + \mu v, w \rangle &= \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle \\ \langle u, \lambda v + \mu w \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle \end{aligned} \right\} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \textbf{bilinear}$$

$$(I2) \text{ -- " --> } \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \textbf{symmetrisch})$$

(iii) Andere übliche Notationen: $\langle v, w \rangle = (v, w) = v \cdot w$.

Beispiele:

(1) Betrachten $\mathbb{R}$ -VR $\mathbb{R}^n$. Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

das **Standard Skalarprodukt** od. **kanonische Skalarprodukt** des $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Es ist } \langle v, w \rangle = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^T w.$$

(2) Betrachten $\mathbb{C}$ -VR $\mathbb{C}^n$. Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} w_i \quad \text{das } \text{Standard Skalarprodukt} / \text{kanonische Skalarprodukt des } \mathbb{C}^n$$

$$= v^* w \quad \text{mit } v^* = \overline{v}^T = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$$

**adjungierte
Matrix**

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} v_i = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \geq 0 \quad \text{und } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i: v_i = 0.$$

(3) Sei $C_{\mathbb{R}}([a, b]) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig} \}$ ($\mathbb{R}$ -VR.)

$$\text{Für } f, g \in C_{\mathbb{R}}([a, b]) \text{ sei } \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx$$

analog: $C_{\mathbb{C}}([a, b]) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist stetig} \}$ ($\mathbb{C}$ -VR.)

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \quad \langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$$

(4) $\mathcal{P}(\mathbb{C}) := \{ \tilde{p}: p \in \mathbb{C}[X] \}$ der $\mathbb{C}$ -VR der Polynomfunktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{\infty} \overline{p(x)} q(x) e^{-x} dx \quad \langle p, p \rangle = \int_0^{\infty} |p(x)|^2 e^{-x} dx \geq 0$$

Def: (1) Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt heißt
Euklidischer (Vektor)raum.

(2) Ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt heißt
unitärer Raum oder Prä-Hilbert-Raum.

(3) Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt heißt auch
Innerer-Produkt-Raum.

Definition Sei $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innerer-Produkt-Raum. Dann heißt

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{Norm oder Länge von } v \in V.$$

Bsp: Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, so ist

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Lemma: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(1) Sei $v \in V$ fest gewählt. Die Abbildung $V \rightarrow K, x \mapsto \langle v, x \rangle$ ist linear.

(2) $\forall v \in V: \langle 0, v \rangle = 0$ und $\langle v, 0 \rangle = 0$

(3) $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(4) $\forall v \in V \forall \lambda \in K: \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Beweis: (1) nach (I1)

(2) Wegen (1) ist $\langle v, 0 \rangle = 0$

$$\langle 0, v \rangle = \overline{\langle v, 0 \rangle} = \overline{0} = 0$$

(3) Wegen $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ folgt das aus (I3).

(4) Genügt zz: $\|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2$.

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle \underset{(I1)}{=} \lambda \langle \lambda v, v \rangle \underset{(I1)}{=} \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2$$

□

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Für $v, w \in V$ gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis: Fall 1: v, w sind linear abhängig $\Rightarrow \exists u \in V \exists \lambda, \mu \in K: v = \lambda u, w = \mu u$

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle \lambda u, \mu u \rangle| = |\mu \bar{\lambda} \langle u, u \rangle| = |\mu| |\lambda| \|u\|^2 = \|\lambda u\| \|\mu u\| = \|v\| \|w\|.$$

Fall 2: v, w sind linear unabhängig

$$\Rightarrow \forall \epsilon \in K: v + \epsilon w \neq 0$$

$$0 < \|v + \epsilon w\|^2 = \langle v + \epsilon w, v + \epsilon w \rangle = \langle v, v \rangle + \bar{\epsilon} \langle w, v \rangle + \epsilon \langle v, w \rangle + \epsilon \bar{\epsilon} \langle w, w \rangle \\ = \|v\|^2 + \overline{\epsilon \langle v, w \rangle} + \epsilon \langle v, w \rangle + |\epsilon|^2 \|w\|^2$$

$$\text{Setze } \epsilon = -\frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} = -\frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \Rightarrow 0 < \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} - \frac{\overline{\langle v, w \rangle} \langle v, w \rangle}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \quad \text{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \Rightarrow |\langle v, w \rangle|^2 < \|v\|^2 \|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w \rangle| < \|v\| \|w\|.$$

□

Satz (Dreiecksungleichung) Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Dann gilt die Dreiecksungleichung:

$$\forall v, w \in V : \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Beweis:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \underbrace{\langle w, v \rangle}_{= \overline{\langle v, w \rangle}} + \langle w, w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle| + \|w\|^2$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

□

Def: Sei V ein K -VR. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$$

heißt **Norm auf V** , wenn für alle $v, w \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

$$(N1) \quad \|v\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

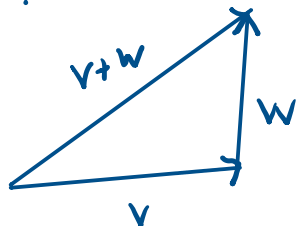
$$(N2) \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$(N3) \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Ein K -VR gemeinsam mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt **normierter Raum**.

Bem: • Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ die induzierte Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ($v \in V$). Dann erfüllt $\|\cdot\|$ die Eigenschaften (N1)–(N3), und ist deshalb eine Norm im Sinne der obigen Definition. Insbesondere: Jeder Innen-Produkt-Raum ist ein normierter Raum.

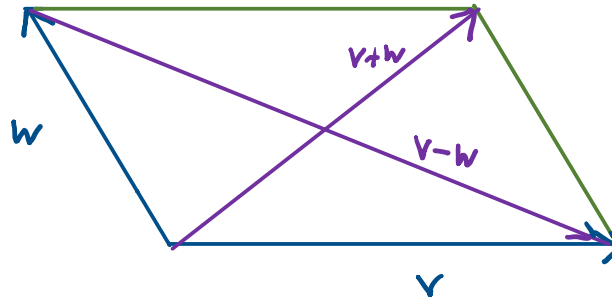
• zu (N3), im $\mathbb{R}^2$:



Satz (Parallelogrammgleichung) Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für die induzierte Norm gilt die **Parallelogrammgleichung**:

$$\forall v, w \in V: \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Bsp: Geometrische Anschauung im $\mathbb{R}^n$:



Beweis:

$$\left. \begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \|w\|^2 \\ \|v-w\|^2 &= \langle v-w, v-w \rangle = \|v\|^2 - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \|w\|^2 \end{aligned} \right\} \oplus$$

□

Bsp: Auf $\mathbb{R}^2$ ist $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2|$ eine Norm, die nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird, denn

$$\|e_1 + e_2\|_1^2 + \|e_1 - e_2\|_1^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_1^2 = 4 + 4 = 8$$

$$2\|e_1\|_1^2 + 2\|e_2\|_1^2 = 2 + 2 = 4,$$

also gilt die Parallelogrammgleichung nicht!

Bem: Sei V ein K -VR mit Norm $\|\cdot\|$.

Dann ist $\|\cdot\|$ genau dann durch ein Skalarprodukt induziert

(d.h. es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$), wenn $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt.

Ansatz für $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle v, w \rangle := \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2)$ ($K=\mathbb{R}$) , bzw.

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2) + \frac{i}{4} (\|v+iw\|^2 - \|v-iw\|^2) \quad (K=\mathbb{C})$$

(„Polarisationsformel“)

Winkel zwischen zwei Vektoren

Sei $K = \mathbb{R}$. Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR.

Für $v, w \in V \setminus \{0\}$ ist $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (Cauchy-Schwarz)

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

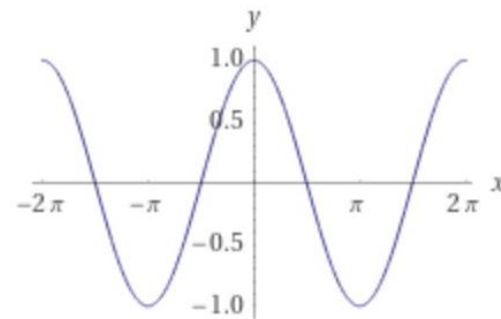
D.h. es gibt genau ein $\vartheta \in [0, \pi]$ mit $\cos(\vartheta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

Def: Ist V ein $\mathbb{R}$ -VR und sind $v, w \in V \setminus \{0\}$, so ist

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad \text{der Winkel zwischen } v \text{ und } w.$$

Bem: $\angle(v, w) = \angle(w, v)$,

$$\angle(v, w) = \angle(v, \lambda w) = \angle(\lambda v, w) \quad \text{für } \lambda > 0.$$



Bem: Im $\mathbb{R}^n$ stimmt die hier gegebene Definition des Winkels mit unserer geometrischen Vorstellung eines (unorientierten) Winkels überein.

Da zwei Vektoren stets in einer Ebene liegen, betrachten wir nur den Fall $n=2$

(der allgemeine Fall kann durch Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis darauf zurückgeführt werden [später])

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $v' := \frac{v}{\|v\|}$, $w' := \frac{w}{\|w\|}$

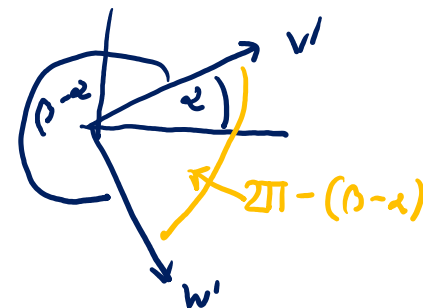
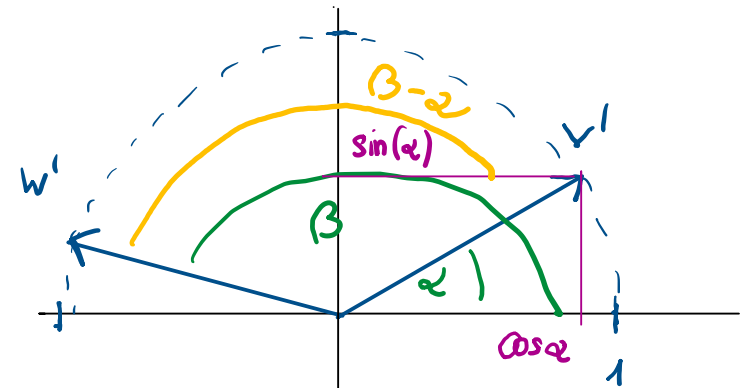
$$\Rightarrow \angle(v, w) = \angle(v', w'), \quad \|v'\| = \|w'\| = 1$$

Analysis: $v' = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$, $w' = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$

O.E: $\beta \geq \alpha$.

$$\langle v', w' \rangle = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha)$$

$$\angle(v', w') = \begin{cases} \beta - \alpha & \text{falls } \beta - \alpha \in [0, \pi] \\ 2\pi - (\beta - \alpha) & \text{falls } \beta - \alpha \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$



Bem: Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $\langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \angle(v, w) = \frac{\pi}{2}$

Def: Sei V ein K -VR ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen **orthogonal**, wenn gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

Satz Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$.

(1) Für $v, w \in V$ gilt $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$ (Kosinussatz)
 $= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos(\angle(v, w))$

(2) Ist $\langle v, w \rangle = 0$ ($\Leftrightarrow \angle(v, w) = \frac{\pi}{2}$) so gilt $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. (Satz von Pythagoras)

Beweis: einfache Übung,

Bsp: im $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt:

