Das charakteristische Polynom

Def: Sei $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_{n\times n}(K)$. Das Polynom

$$P_A := P_A(X) := \det(A-XE) = \begin{bmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-X \end{bmatrix} \in K[X]$$

heißt **charakteristisches Polynom** von A.

Die dadurch bestimmte Funktion $\tilde{P}_A : K\to K,\ \lambda\mapsto P_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ heißt **charakteristische Funktion** von A.

Bem: • Ist $|K|=\infty$, so unterscheidet man oft nicht zwischen P_A und $\tilde{P}_A$. Das ist durch den Identitätssatz gerechtfertigt.

Lemma Sind $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnliche Matrizen, so ist $P_A(X) = P_B(X)$

Beweis: Sei $S \in GL_n(K)$ mit $B = SAS^{-1}$.

$$P_B(X) = \det(B - XE) = \det(SAS^{-1} - XE) = \det(SAS^{-1} - XSS^{-1}E) = \det(SAS^{-1} - SXES^{-1})$$
$$= \det(S(A - XE)S^{-1}) = \det(A - XE) = P_A(X).$$

$\square$

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

Def: Sei V ein endlich-dimensionaler K-VR und $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus.
Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, so sei
$P_\varphi := P_\varphi(X) := P_A(X)$ das charakteristische Polynom von φ, und
$\tilde{P}_\varphi := \tilde{P}_A : K \to K$ die charakteristische Funktion von φ.

Bsp:

(1) Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix.

$\longrightarrow P_A(X) = (a_{11} - X) \cdots\cdots (a_{nn} - X)$

(2) Sei $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$

$\Longrightarrow P_M(X) = (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc.$

<u>Lemma</u>: Sei $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$ und $P_A \in K[X]$ das charakteristische Polynom von A.
Dann ist $\deg P_A = n$.

Ist $P_A = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_1 X + b_0$ mit $b_0, \ldots, b_n \in K$, so gilt:

- $b_n = (-1)^n$
- $b_0 = \det(A)$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (für $n \geq 1$)

Lemma: [...] $\deg P_A = n$, $P_A = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_1 X + b_0$

$b_n = (-1)^n$, $b_0 = \det(A)$, $b_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Beweis: $n=0$: $\det A = 1$, $P_A = 1$ ✓

$n \geq 1$: Setze $a'_{ij} := \begin{cases} a_{ii} - X & \text{falls } i=j \\ a_{ij} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

$$P_A(X) = \det\left((a'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = (a_{11} - X) \cdots (a_{nn} - X) + \underbrace{\sum_{id \neq \sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)}}_{=:Q\, \in K[X]}$$

Ist $id \neq \sigma$ so gibt es zumindest zwei $1 \leq i \leq n$ mit $\sigma(i) \neq i$.

$\Rightarrow \deg Q \leq n-2$.

$$P_A(X) = \underbrace{(-1)^n}_{=b_n} X^n + \underbrace{(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})}_{b_{n-1}} X^{n-1} + \tilde{Q} \quad \text{mit } \deg \tilde{Q} \leq n-2$$

$b_0 = P_A(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det(A)$.

$\square$

Bem: Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$.

$\mathrm{Tr}(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$ heißt **Spur** von A (engl.: **trace**).

Sind $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich, so gilt $P_A = P_B$, und deshalb $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Für einen Endomorphismus $\varphi: V \to V$ mit $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ($\mathcal{B}$ Basis von V) ist es also sinnvoll $\mathrm{Tr}(\varphi) := \mathrm{Tr}(A)$ zu definieren.

Bsp: Sei $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ und $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Zusammenfassend:

<u>Satz:</u> Sei V ein K-VR mit $\dim V = n < \infty$ und $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus.
Das charakteristische Polynom $P_\varphi \in K[X]$ hat folgende Eigenschaften:

(1) $\deg P_\varphi = n$

(2) P_φ beschreibt die Abbildung $\tilde{P}_\varphi: K \to K,\ \lambda \mapsto \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$

(3) Die Nullstellen von P_φ sind die Eigenwerte von φ.

(4) Ist $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ für eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so ist $P_\varphi = P_A$.

(5) $P_\varphi = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(\varphi) X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_1 X + \det(\varphi)$

<u>Korollar:</u> Sei $K = \mathbb{C}$ (oder allgemeiner, K algebraisch abgeschlossen) und V ein endlich-dimensionaler K-VR mit $\dim V \geq 1$. Dann besitzt jeder Endomorphismus $\varphi: V \to V$ (zumindest) einen Eigenwert.

<u>Beweis:</u> P_φ besitzt Nullstellen. $\square$

Bsp: (1) Sei $A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Spiegelungsmatrix.

$$P_A(X) = -(\cos(\beta) - X)(+\cos(\beta) + X) - \sin(\beta)^2 = -\cos(\beta)^2 + X^2 - \sin(\beta)^2 = X^2 - 1$$
$$= (X-1)(X+1)$$

(2) Sei $B = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Drehmatrix, $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$P_B(X) = (\cos(\alpha) - X)^2 + \sin(\alpha)^2 = \cos(\alpha)^2 - 2\cos(\alpha)X + X^2 + \sin(\alpha)^2$$
$$= X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$$

Diskriminante: $4\cos^2(\alpha) - 4 = 4(\underbrace{\cos(\alpha)^2 - 1}_{\leq 0})$ keine reellen NSt, außer für $\alpha \in \{0, \pi\}$.

$\alpha = 0$: $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

$\alpha = \pi$: $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$

$\alpha \neq 0, \pi$: komplexe EW: $\cos(\alpha) \pm i \sin(\alpha) = e^{\pm i\alpha}$.

Def: Sei V ein K-VR mit $\dim V = n < \infty$. und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus.
Die **algebraische Vielfachheit** $\mu(P_\varphi; \lambda)$ eines EW $\lambda \in K$ von φ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von P_φ.

Lemma: Ist λ EW von φ, so gilt $1 \leq \dim \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda) \leq \mu(P_\varphi; \lambda)$

Beweis: Sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi; \lambda)$. Wir erweitern $(v_1, \dots, v_m)$ zu einer Basis von V.

$$\Longrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\lambda\\ \ddots\\ \lambda\end{array}}\right\} m \\ \vphantom{A'} \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{\lambda \ \ddots \ \lambda}}_{m} \end{array}$$

$$\Longrightarrow P_\varphi(X) = (\lambda - X)^m P_{A'}(X)$$

$$\Longrightarrow m \leq \mu(P_\varphi; \lambda).$$

$\square$

Bsp:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

$\Rightarrow P_J(X) = (\lambda - X)^n \Rightarrow \lambda$ hat alg. Vielfachheit n

$$\ker(J-\lambda E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang}(J-\lambda E) = n-1 \Rightarrow \lambda$ hat geom. Vielfachheit 1.

Satz: Sei V ein endlich-dimensionaler VR, $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus.
Dann ist φ diagonalisierbar, genau dann wenn gilt

(i) P_φ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$P_\varphi = \pm (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K.$$

UND

(ii) $\dim \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda) = \mu(P_\varphi; \lambda)$ für jeden EW λ von φ.

Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen EW von φ,
$m_i := \dim \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda_i)$, $\mu_i := \mu(P_\varphi; \lambda_i)$.

W6: φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $m_1 + \dots + m_s = n$.

„$\Leftarrow$": $n \underset{(i)}{=} \mu_1 + \dots + \mu_s \underset{(ii)}{=} m_1 + \dots + m_s \overset{W6}{\Longrightarrow} \varphi$ diagonalisierbar.

„$\Rightarrow$": $n = m_1 + \dots + m_s \underset{=}{\leq} \mu_1 + \dots + \mu_s \underset{=}{\leq} n \overset{m_i \leq \mu_i}{\Longrightarrow} \forall i: \ m_i = \mu_i$ (ii) ✓

$\mu_1 + \dots + \mu_s = n \longrightarrow$ (i).

$\square$

Bem: EW, Determinante, Spur, algebraische und geometrische Vielfachheit hängen nur von φ ab, nicht aber von der gewählten Matrixdarstellung. Insbesondere haben ähnliche Matrizen A, B dieselben EW mit der gleichen Vielfachheit.

Achtung: Sind A, B Matrizen mit $B = SAS^{-1}$ und λ ein EW von A (und damit auch B) und $Av = \lambda v$ $(v \neq 0)$ $\not\Rightarrow$ $Bv = \lambda v$

Die Jordansche Normalform (ohne Beweise)

V sei K-VR mit $\dim V = n < \infty$ und $\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus, so dass das charakteristische Polynom P_φ in Linearfaktoren zerfällt (immer erfüllt für $K = \mathbb{C}$).

Ist $\dim \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda) < \mu(P_\varphi, \lambda_i)$, so ist φ dennoch nicht diagonalisierbar.

Def: Sei $r \geq 1$ und $\lambda \in K$. Die $r \times r$-Matrix

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

heißt Jordanblock (oder Jordankästchen) der Länge r zum Eigenwert λ.

Satz: Sei V ein endlich-dim. VR und $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus, so dass P_φ in Linearfaktoren zerfällt.
Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass gilt

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_q} \end{bmatrix}$$

mit Jordanblöcken $J_1, \ldots, J_q$. D.h. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke Jordanblöcke sind.

Def: Eine solche Matrix heißt Matrix in Jordanscher Normalform

Sei λ ein EW von φ, $\quad \psi := \varphi - \lambda \mathrm{id}$

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(\psi)}_{= \mathrm{Eig}(\varphi; \lambda)} \subseteq \mathrm{Ker}(\psi^2) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ker}(\psi^j) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi^{j+1}) \subseteq \dots \subseteq V.$$

Aus Dimensionsgründen gibt es ein kleinstes $r \geq 1$ mit $\mathrm{Ker}(\psi^r) = \mathrm{Ker}(\psi^{r+1})$

<u>Kann zeigen</u>: $\forall j \geq 1$: $\mathrm{Ker}(\psi^r) = \mathrm{Ker}(\psi^{r+j})$

<u>Def</u>: $\mathrm{Hau}(\varphi; \lambda) := \mathrm{Ker}(\psi^r) = \mathrm{Ker}((\varphi - \lambda\, \mathrm{id})^r)$ ist der Hauptraum von φ zum EW φ.

<u>Bem</u>: •) $\dim \mathrm{Hau}(\varphi; \lambda) = \mu(P_\varphi; \lambda)$ und $r \leq \mu(P_\varphi; \lambda)$

•) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die pw. verschiedenen EW von φ, so ist

$$V = \mathrm{Hau}(\varphi; \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hau}(\varphi; \lambda_s).$$

$\forall i$: $\varphi(\mathrm{Hau}(\varphi; \lambda_i)) \subseteq \mathrm{Hau}(\varphi, \lambda_i)$

Satz: Sei V ein endlich-dim K-VR, $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus so dass P_φ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis, so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_q} \end{bmatrix}$$

in Jordanscher Normalform ist.

Dann gelten:

(1) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwert λ von φ ist die Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ.

(2) Die algebraische Vielfachheit eines EW λ von φ ist die Summe der Längen der Jordanblöcke zum EW λ.

(3) Die kleinste Potenz r für die $\operatorname{Ker}((\varphi-\lambda \operatorname{id})^r) = \operatorname{Hau}(\varphi, \lambda)$ ist, ist die größte Länge der Jordanblöcke zum EW λ.

(4) Die Anzahl der Jordanblöcke mit Länge größer als i zum EW λ ist $\operatorname{rank}((\varphi-\lambda \operatorname{id})^i) - \operatorname{rank}((\varphi-\lambda \operatorname{id})^{i+1}) = \dim(\ker(\varphi-\lambda \operatorname{id})^{i+1}) - \dim(\ker(\varphi-\lambda \operatorname{id})^i)$

(5) Die Jordanblöcke sind, bis auf ihre Reihenfolge auf der Diagonalen, eindeutig bestimmt

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P_A(X) = -(X-2)^2(X-1)^3$

$B := A - 2E$: $\dim(\ker(\underbrace{B^0}_{=E})) = 0$

$\dim(\ker(B)) = 2 = \mu(P_A; 2)$

$\Rightarrow$ Zum EW 2 gibt es genau zwei Jordanblöcke, mit Länge 1

$C := A - E$: $\dim(\ker(\underbrace{C^0}_{=E})) = 0$ $\quad \dim(\ker(C)) = 2$ $\quad \dim(\ker(C^2)) = 3 = \mu(P_A; 1)$

$\Rightarrow$ Zum EW 1 gibt es genau $2-0=2$ Jordanblöcke mit Länge ≥ 1

— 〃 — $3-2=1$ Jordanblock mit Länge ≥ 2

— 〃 — keine Jordanblöcke mit Länge ≥ 3.

$\Rightarrow \exists S \in GL_5(\mathbb{R})$: $SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & & & & \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & & \\ & & & & \boxed{1} \end{bmatrix}$.

Korollar: Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und $P_A(X)$ zerfalle in Linearfaktoren.

(1) Es gibt eine Matrix $J \in M_{n\times n}(K)$ in Jordanscher Normalform und $S \in GL_n(K)$: $J = SAS^{-1}$.

(2) Die Matrix J ist, bis auf Reihenfolge ihrer Blöcke, eindeutig durch A bestimmt.

(3) Ist $B \in M_{n\times n}(K)$ und $P_B(X)$ zerfällt in Linearfaktoren, so gilt:

A, B sind ähnlich $\Leftrightarrow$ A, B besitzen [bis auf Umordnung der Blöcke] dieselbe Jordansche Normalform

Insbesondere: $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sind ähnlich

$\Leftrightarrow$ A, B besitzen [bis auf Umordnung der Blöcke] dieselbe Jordansche Normalform.