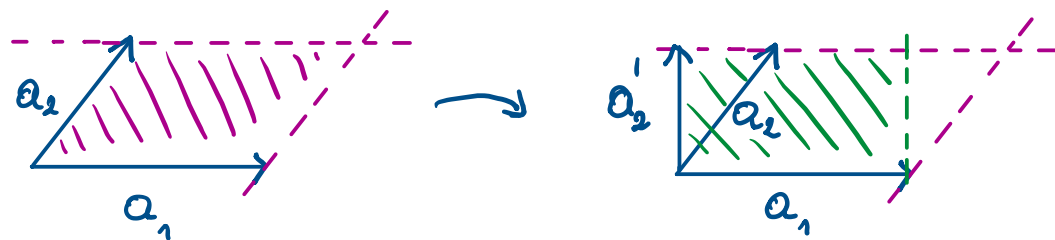


Volumen & Orientierung

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_1, \dots, a_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Analog zum Fall $n=2$ ist $|\det A|$ das Volumen des von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannten Parallelotops ($n=3$: Parallelepipiped, Spat, $n=2$: Parallelogramm)

Beweisidee: Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen
 $\hat{=}$ Scherung



$$a_2' = a_2 + \lambda a_1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \det(a_1, a_2) = \det(a_1, a_2')$$

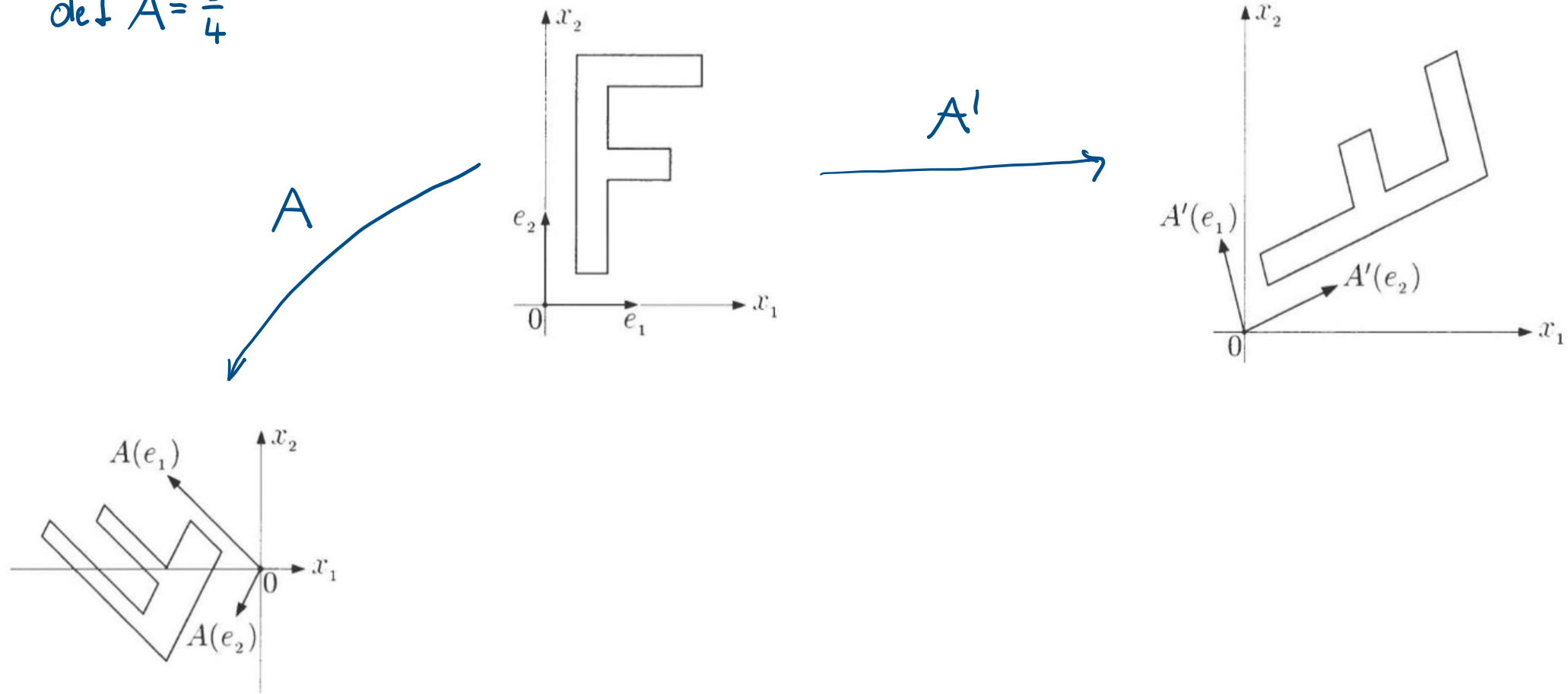
und die von a_1, a_2 bzw. a_1, a_2' aufgespannten Parallelogramme haben dieselbe Fläche

$\leadsto$ Reduktion auf den Fall eines Quaders.

Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus, so beschreibt $|\det \varphi|$ die durch φ bewirkte Veränderung des Volumens

Bsp: $A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\det A' = -\frac{9}{8}$

$\det A = \frac{3}{4}$



Definition:

Ein Automorphismus $\varphi: V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$ -VRs V

heißt

orientierungstreu falls $\det \varphi > 0$

orientierungsuntreu falls $\det \varphi < 0$.

Sind $A = (v_1, \dots, v_n)$, $B = (w_1, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, und φ der eindeutig bestimmte Automorphismus mit $\varphi(v_i) = w_i$ ($i=1, \dots, n$) so heißen A und B **gleich orientiert** ($A \sim B$), wenn $\det \varphi > 0$

Bem: $\det \varphi > 0 \iff \det T_{A \rightarrow B}^{\varphi} > 0$ [denn: $M_{B \rightarrow A}^{\varphi}(\varphi) = E$ $\det(\varphi) = \det(M_{A \rightarrow B}^{\varphi}(\varphi)) = \det(T_{A \rightarrow B}^{\varphi} E) = \det(T_{A \rightarrow B}^{\varphi})$.]
 $\iff \det T_{B \rightarrow A}^{\varphi} > 0$. [denn: $\det(T_{B \rightarrow A}^{\varphi}) = \frac{1}{\det(T_{A \rightarrow B}^{\varphi})}$.]

Sind $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, und φ der eindeutig bestimmte Automorphismus mit $\varphi(v_i) = w_i$ ($i=1, \dots, n$) so heißen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleich orientiert ($\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$), wenn $\det \varphi > 0$ ($\Leftrightarrow \det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) > 0 \Leftrightarrow \det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) > 0$).

Lemma: Gleichorientiertheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V .

Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen, die man als **Orientierungen** bezeichnet.

Beweis: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}: \det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = \det(E) = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{A}: \det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) = \frac{1}{\det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})} > 0 \quad \checkmark$$

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{C}: \det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}) = \det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \underbrace{\det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})}_{>0} \underbrace{\det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})}_{>0} > 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Sei } \mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{A}' = (-v_1, v_2, \dots, v_n) \Rightarrow \mathcal{A} \not\sim \mathcal{A}'.$$

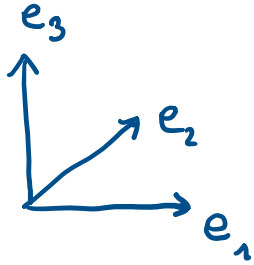
$$\text{Sei } \mathcal{B} \text{ eine Basis von } V. \text{ Ang. } \mathcal{A} \not\sim \mathcal{B} \text{ zz: } \mathcal{B} \sim \mathcal{A}'.$$

$$\det(T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}}) = \det(T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \underbrace{\det(T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}})}_{<0} \underbrace{\det(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})}_{>0} > 0 \Rightarrow \mathcal{A}' \sim \mathcal{B}.$$

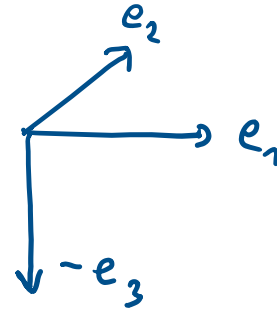
□

Ist $V = \mathbb{R}^n$ so bezeichnet man Basen die mit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ gleichorientiert sind als positiv orientiert, andere als negativ orientiert

Bsp: $\mathbb{R}^3$:



$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ist positiv orientiert



$\mathcal{A} = (e_1, e_2, -e_3)$ ist negativ orientiert

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Achtung: $\mathcal{E}' = (e_1, e_3, e_2)$ ist auch negativ orientiert!

Bemerkung zur Analysis

Auch bei der Beschreibung von Volumensveränderungen einer nicht-linearen Abb. taucht die Determinante in der mehrdimensionalen Integralrechnung auf.

Transformationssatz: Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $T: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus (bijektiv, T & T^{-1} stetig differenzierbar). Eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann über V genau dann integrierbar, wenn $(f \circ T) |\det J_T|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(T(x)) |\det J_T(x)| dx.$$

Hierbei ist $J_T(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ die **Jacobimatrix** von T .

Siehe: Königsberger, Analysis 2, 2. Aufl, 1997, Springer
- Kapitel 9.

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf den $\mathbb{R}^3$.

Def: Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei $a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -a_1 b_3 + b_1 a_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Die Verknüpfung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto a \times b$ heißt **Kreuzprodukt**
(auch: **Vektorprodukt**, **äußeres Produkt**)

Merkmale:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

formal nach der ersten Spalte entwickeln.

Satz (Rechenregeln für das Kreuzprodukt) Für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) \quad (a+a') \times b = a \times b + a' \times b \qquad a \times (b+b') = a \times b + a \times b'$$

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) \qquad a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$$

$$(2) \quad a \times b = -b \times a, \quad \text{insbesondere} \quad a \times a = 0.$$

$$(3) \quad a \times b = 0 \iff a, b \text{ sind linear abhängig}$$

Beweis: (1), (2) nachrechnen.

$$(3) \quad a \times b = \begin{pmatrix} |a_2 & b_2| \\ |a_3 & b_3| \\ -|a_1 & b_1| \\ |a_3 & b_3| \\ |a_1 & b_1| \\ |a_2 & b_2| \end{pmatrix}$$

Die Aussage folgt nun aus Aufgabe 24(a) aus den Übungen.

Bsp: Achtung: $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ i.A.!

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$$

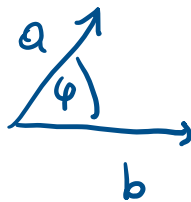
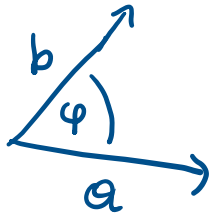
$$e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0$$

Wiederholung: Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{das Standard Skalarprodukt}$$

$$\text{und } \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{die euklidische Normfunktion auf } \mathbb{R}^3$$

Es ist $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \varphi$, wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist.
($a, b \neq 0$)



hier ist der unorientierte Winkel gemeint.

Satz: Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(1) \quad \langle a \times b, c \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{insbesondere } \langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$$

$$(2) \quad \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \quad \text{und} \quad \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \varphi$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist.

Beweis: (1)

$$\det \begin{pmatrix} a_1^+ & b_1^- & c_1^+ \\ a_2^- & b_2^+ & c_2^- \\ a_3^+ & b_3^- & c_3^+ \end{pmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \langle a \times b, c \rangle$$

Satz: Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(1) \quad \langle a \times b, c \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{insbesondere } \langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$$

$$(2) \quad \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \quad \text{und} \quad \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \varphi$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist.

Beweis: (2) (*) nachrechnen.

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \varphi = \|a\|^2 \|b\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2 \varphi)}_{\sin^2 \varphi}$$

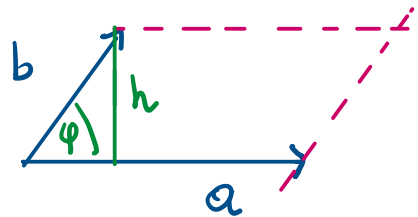
$$\xrightarrow[\sin \varphi > 0]{\varphi \in [0, \pi]} \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \varphi.$$

Geometrische Interpretation: Sind a, b lin. abh., so ist $a \times b = 0$

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig.

• $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0 \Rightarrow a \times b$ ist orthogonal zur von a, b aufgespannten Ebene

• $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \varphi$ ist die (unorientierte) Fläche des von a, b aufgespannten Parallelograms.



$$h = \|b\| \sin \varphi$$

Damit ist $a \times b$ bis auf das Vorzeichen festgelegt!

$\mathcal{A} = (a, b, a \times b)$ ist eine Basis.

$$\det(T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}) = \det(a \ b \ a \times b) = \langle a \times b, a \times b \rangle > 0$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ positiv orientiert.

$\Rightarrow$ Vorzeichen von $a \times b$ ist durch Rechte-Hand-Regel festgelegt

EIGENWERTE

Definition: Sei V ein K -VR und $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von φ , wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Jedes $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = \lambda v$ heißt **Eigenvektor** von φ (zum Eigenwert λ)

Ist $A \in M_{n \times n}(K)$ eine Matrix so heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von A bzw. $0 \neq v \in V$ Eigenvektor von A zum EW λ , wenn dies für die Abbildung $K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$ gilt.

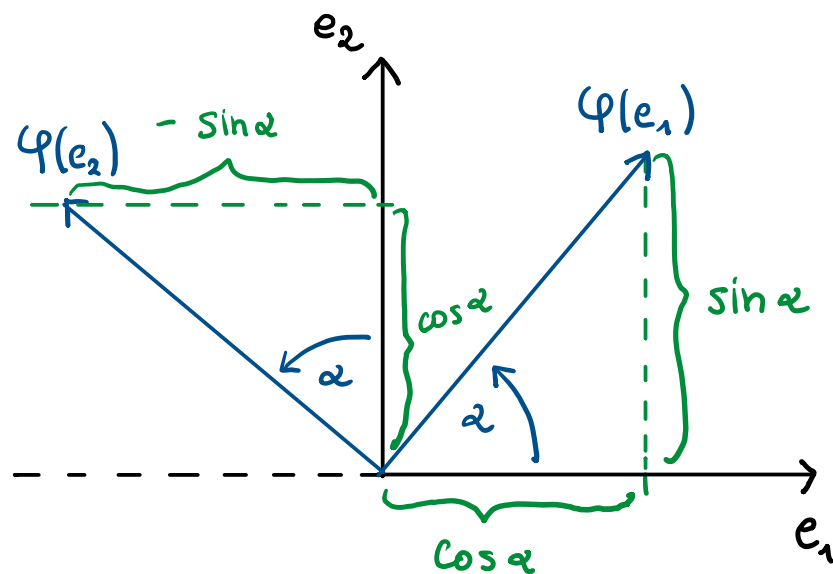
Beispiele:

- Sei $V = K^n$ und φ gegeben durch eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K) \quad A e_i = \alpha_i e_i$$

$\Rightarrow$ Für alle $1 \leq i \leq n$ ist α_i ein Eigenwert und e_i ein Eigenvektor zum EW α_i .

- Drehungen im $\mathbb{R}^2$: Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$



$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha = 0}: M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EW: 1

Jedes $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ ist EV zum EW 1

$$\underline{\alpha = \pi}: \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

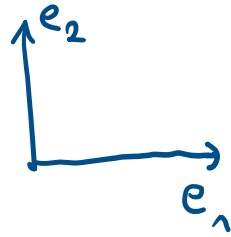
EW: -1

Jedes $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ ist EV zum EW -1

$\alpha \neq 0, \pi$: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$ hat keinen EW!

- Spiegelung im $\mathbb{R}^2$:

Spiegelung an der x-Achse:



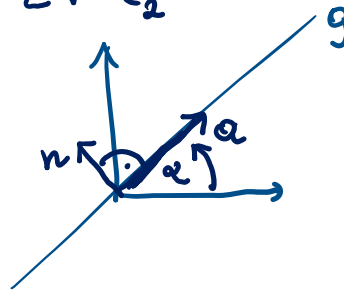
$$\begin{aligned} \rightarrow e_1 &= \varphi(e_1) \\ \downarrow -e_2 &= \varphi(e_2) \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

EW 1 mit EV e_1

EW -1 mit EV e_2

Spiegelung an einer Geraden g :



$$S_g a = a, \quad S_g n = -n$$

$\Rightarrow$ EW 1 mit EV a

EW -1 mit EV n

Matrixdarstellung:

Mit $D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} S_g &= D_\alpha S D_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ 2 \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(D_\alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(S_g) = -\cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = -1$$

Drehungen ~~im~~ sind orientierungstreu, Spiegelungen orientierungsuntreu!

Lemma: Sei V ein endlich-dim. K -VR, $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Folgende Aussagen sind für $\lambda \in K$ äquivalent:

- (1) λ ist Eigenwert von φ
- (2) $\ker(\varphi - \lambda \text{id}) \neq 0$
- (3) $\varphi - \lambda \text{id}$ ist nicht injektiv
- (4) $\varphi - \lambda \text{id}$ ist nicht surjektiv
- (5) $\varphi - \lambda \text{id}$ ist nicht bijektiv

Beweis: (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) da $\varphi - \lambda \text{id}$ ein Endomorphismus des endlich-dim. VR V ist.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Sei $v \in V$.

$$\begin{aligned} \varphi(v) = \lambda v &\Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda \text{id}(v) = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \text{id})(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \ker(\varphi - \lambda \text{id}). \end{aligned}$$

Def: Sei V ein endlich-dimensionaler K -VR, $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, und $\lambda \in K$.

$$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\} = \ker(\varphi - \lambda \text{id})$$

ist ein Unterraum von V und heißt **Eigenraum** von φ bezüglich λ .

($\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge aller zu λ gehöriger EV von φ .)

Die Zahl $\dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$ bezeichnet man als **geometrische Vielfachheit** von λ

Bsp: • $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\text{Eig}(A, 2) = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle$

$$\text{Eig}(A, 3) = \langle e_2 \rangle$$

$\lambda \neq 2, 3:$

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \ker\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

• $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\text{Eig}(B, \lambda) = K^2$ für $\mu \neq \lambda: \text{Eig}(B, \mu) = 0$