Analog zum Fall $n=3$ könnte man herleiten: Für $A=(a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\in M_{n\times n}(K)$ muss gelten

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}\,a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

(Leibniz-Formel)

$\operatorname{sgn}(\sigma)$: Signum (± 1)

S_n: Menge aller Permutationen (bijektive Abbildungen: $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$)

Um diese Formel zu verstehen, müssen wir verstehen was S_n bzw. $\operatorname{sgn}(\sigma)$ sind!

(Wir werden die Beweise großteils auslassen, auch wenn sie einfach sind.)

Permutationen endlicher Mengen – Die symmetrische Gruppe

Def: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine Permutation (der Menge $\{1,\dots,n\}$) ist eine bijektive Abbildung $\sigma: \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$

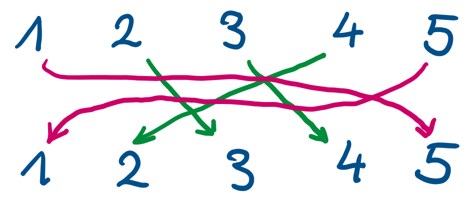
Notation: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ oder kürzer $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ (Verwechslungsgefahr!)

Zweizeilenform — Tupelschreibweise

3. Möglichkeit: Zyklenschreibweise (hier ausgelassen)

Bsp: $n=5$: $\sigma(1)=5$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=2$, $\sigma(5)=1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Satz & Def: Die Menge S_n der Permutationen der Menge $\{1,\dots,n\}$ $(n \geq 1)$ bildet mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$ eine Gruppe ~~eine Gruppe.~~
Man bezeichnet S_n als die symmetrische Gruppe von $\{1,\dots,n\}$

Bsp: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.

<u>Satz:</u> S_n enthält $n! = \prod_{k=1}^{n} k = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ Elemente [o.B., einfach]

<u>Bemerkung:</u> $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ (Stirling-Formel)

1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362.880, $\underbrace{3.628.800}^{=10!}$, ...

<u>Def:</u> $\tau \in S_n$ heißt Transposition, wenn es $k, \ell \in \{1,\dots,n\}$ mit $k \neq \ell$ gibt, so dass gilt:

$$\tau(i) = \begin{cases} \ell & \text{falls } i = k \\ k & \text{falls } i = \ell \\ i & \text{falls } i \notin \{k, \ell\} \end{cases}$$

D.h. τ vertauscht k und ℓ und lässt andere Elemente unverändert.

<u>Bem:</u> Wegen $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$ gilt $\tau^{-1} = \tau$ für jede Transposition τ.

<u>Lemma</u> Sei $n \geq 1$. Zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k$ mit

$$\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k .$$

(Im Fall $n=1$ ist $\sigma = \mathrm{id}$ und $k=0$, d.h. die Identität darstellbar als leeres Produkt)

[o.B., einfach]

Lemma Sei $n \geq 1$. Zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k$ mit

$$\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k .$$

Die obige Darstellung ist nicht eindeutig!

Man kann aber zeigen: Ist $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k = \pi_1 \cdots \pi_\ell$ mit Transpositionen τ_i, π_i, so sind k & ℓ entweder beide gerade oder beide ungerade (nicht ganz einfach!)

Def: Ist $S_n \ni \sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ mit Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k$, so ist

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k \in \{\pm 1\}$ das Signum der Permutation σ.

$$\sigma \text{ heißt } \begin{cases} \text{gerade} & \text{falls } \operatorname{sgn}(\sigma) = 1 \\ \text{ungerade} & \text{falls } \operatorname{sgn}(\sigma) = -1 . \end{cases}$$

Bem: Es gibt auch andere Möglichkeiten das Signum zu charakterisieren

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand ist ein Paar $1 \leq i < j \leq n$ mit $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ist $a(\sigma)$ die Anzahl der Fehlstände von σ so gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{a(\sigma)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} .$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{a(\sigma)} = \prod_{1 \leq i < j < n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{sgn} \sigma = 1$

(i,j) : $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$ $i<j$

$(\sigma(i), \sigma(j))$: $\underline{(3,1)}$ $\underline{(3,2)}$ $(1,2)$

2 Fehlstände

$$\prod_{1 \leq i < j < 3} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\cancel{1-3}^{\,-1}}{\cancel{2-1}} \cdot \frac{\cancel{2-3}^{\,-1}}{\cancel{3-1}} \cdot \frac{\cancel{2-1}}{\cancel{3-2}} = (-1)(-1) \cdot 1 = 1.$$

Lemma: Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ (*)
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) [= \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1}] = \operatorname{sgn}(\sigma)$
- Ist τ eine Transposition, so ist $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$

Bem:
- (*) bedeutet: $\operatorname{sgn}: S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

  zwei-elementige Gruppe
- $\det: GL_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist auch ein Gruppenhomomorphismus!
- Ist $\varphi: V \to W$ eine lineare Abb. von VR, so ist $\varphi: (V,+) \to (W,+)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Satz & Def: Die Menge $A_n := \{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ der geraden Permutationen bildet eine Untergruppe von A_n.

(d.h. $\emptyset \neq A_n$, $\forall \sigma, \tau \in A_n: \sigma\tau \in A_n$, $\forall \sigma \in A_n: \sigma^{-1} \in A_n$)

Satz & Def: Die Menge $A_n := \{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ der geraden Permutationen bildet eine Untergruppe von A_n (d.h. $\emptyset \neq A_n$, $\forall \sigma,\tau \in A_n: \sigma\tau \in A_n$, $\forall \sigma \in A_n: \sigma^{-1} \in A_n$)
Man nennt A_n die alternierende Gruppe auf $\{1,\dots,n\}$

Sei $\tau \in S_n$ eine beliebige Transposition.

Dann ist
$$\begin{cases} A_n \longrightarrow S_n \setminus A_n \\ \sigma \longmapsto \sigma\tau \end{cases}$$
eine bijektive Abbildung mit Umkehrabbildung
$$\begin{cases} S_n \setminus A_n \longrightarrow A_n \\ \sigma \longmapsto \sigma\tau \end{cases} \qquad (\text{denn } \tau^{-1} = \tau)$$

<u>Insbesondere:</u> $|A_n| = |S_n \setminus A_n| = \frac{n!}{2}$

$$S_n = A_n \,\dot\cup\, S_n \setminus A_n = A_n \cup \underbrace{A_n\tau}_{=\{\sigma\tau \,:\, \sigma \in A_n\}} \qquad (\text{analog: } S_n = A_n \,\dot\cup\, \tau A_n)$$

Die Leibniz-Formel: Existenz der Determinante

Satz: Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Es gibt genau eine Determinante

$$\det : M_{n\times n}(K) \longrightarrow K.$$

Für $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in M_{n\times n}(K)$ ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \qquad \text{(Leibnizformel)} \qquad (*)$$

Beweis: Eindeutigkeit: bereits gezeigt.

[Variante: Wir können wie im Fall $n=3$ schließen, dass jede Determinante notwendigerweise $(*)$ erfüllt.]

Existenz: Müssen überprüfen, dass $(*)$ (D1)–(D3) erfüllt.

(D1) $\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_k' + a_k'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k'' \\ \vdots \end{pmatrix}$

(D2) $\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow k \\ \\ \\ \leftarrow \ell \end{array} = 0 \qquad (k \neq \ell)$

(D3) $\det E = 1$

$A=(a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ $\qquad$ $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ $\quad (*)$

(D1)

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_k' + a_k'' \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda a'_{k\sigma(k)} + a''_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a''_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(D3) Für $A=E$ ist $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j \end{cases}$ (Kronecker Delta)

$$\delta_{1\sigma(1)} \cdots \delta_{n\sigma(n)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma = \mathrm{id} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det E = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \underbrace{\delta_{11} \cdots \delta_{nn}}_{=1} = 1.$$

$$A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K) \qquad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \qquad (*)$$

(D2) Angenommen die k-te und ℓ-te Zeile von A sind gleich $(k<\ell)$.
D.h. $\forall j \in \{1,\dots,n\}: \ a_{kj} = a_{\ell j}$

Sei $\tau \in S_n$ die Transposition die k und ℓ vertauscht.

$$\Longrightarrow \quad S_n = A_n \,\dot\cup\, A_n\tau$$

Für $\sigma \in A_n$: $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ und $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -1$

$$\det A = \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{a_{1\sigma(\tau(1))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}}_{\shortparallel} = 0$$

$$a_{1\sigma(1)} \cdots \underbrace{a_{k\sigma(\ell)}}_{= a_{\ell\sigma(\ell)}} \cdots \underbrace{a_{\ell\sigma(k)}}_{\shortparallel \atop a_{k\sigma(k)}} \cdots a_{n\sigma(n)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$\square$

Bemerkung:

- Die Leibnizformel eignet sich für große n (ca. $n > 3$) nicht zur Berechnung der Determinante

- Die Formel $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ zeigt, dass die Determinante eine Polynomfunktion in den Einträgen a_{ij} ist.
  Insbesondere: $\det: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft (stetig) differenzierbar.

- Es gibt eine Vielzahl weiterer Existenzbeweise für die Determinante

Die transponierte Matrix

Def: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in M_{m\times n}(K)$. Die entsprechende transponierte Matrix ist die Matrix $A^T = (a'_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,m\}}} \in M_{n\times m}(K)$ mit Einträgen

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\ \forall j\in\{1,\dots,m\}: \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

Bsp:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

D.h. es wird an der Hauptdiagonale gespiegelt, bzw. Spalten werden zu Zeilen und umgekehrt.

Offensichtlich gilt $(A^T)^T = A$

Satz:

(1) Für $A, B \in M_{m\times n}(K)$ und $\lambda \in K$ gilt: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
d.h. $M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K)$, $A \mapsto A^T$ ist linear

(2) Für $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times k}$: $(AB)^T = B^T A^T$ (Reihenfolge!)

(3) Ist $A \in GL_n(K)$, so gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Beweis: (1) trivial.

(2) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\},\\ j \in \{1,\dots,n\}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,n\}\\ j \in \{1,\dots,k\}}}$,

$b'_{ij} = b_{ji}$ $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n)$, $a'_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$

und $B^T A^T = (c_{ij})$ $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq m)$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b'_{il} a'_{lj} = \sum_{l=1}^{n} b_{li} a_{jl} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{li} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}$$

Satz:

(1) Für $A, B \in M_{m\times n}(K)$ und $\lambda \in K$ gilt: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
d.h. $M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K)$, $A \mapsto A^T$ ist linear

(2) Für $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times k}$: $(AB)^T = B^T A^T$ (Reihenfolge!)

(3) Ist $A \in GL_n(K)$, so gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Beweis: (3) $AA^{-1} = E$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} (A^{-1})^T A^T = E^T = E$$

$$\Longrightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

$\square$

Satz: Für $A \in M_{n\times n}(K)$ ist $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis: Sei $A = (a_{ij})$ und $A^T = (a'_{ij})$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$ $(1 \le i, j \le n)$

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A).$$

$$a_{\underbrace{\sigma(i)}_{j},i} = a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

$$\begin{cases} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \sigma^{-1} \end{cases} \text{ bijektiv.}$$

$\square$

Korollar: Die Eigenschaften (D1)–(D11) gelten sinngemäß auch für Spalten. Zur Berechnung der Determinante dürfen wir also insbesondere Zeilen- und Spaltenoperationen vermischen.

Wir illustrieren die Herleitung anhand von D1 (i):

$$\det\begin{pmatrix} \dots & a_i' + a_i'' & \dots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i' + a_i'')^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i')^T + (a_i'')^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i')^T \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i'')^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dots & a_i' & \dots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \dots & a_i'' & \dots \end{pmatrix}$$

Der Laplacesche Entwicklungssatz

Für $A \in M_{n \times n}(K)$ und $1 \leq i, j \leq n$ sei $A^{i,j}$ jene $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

__Satz__ (Entwicklungssatz von Laplace) Ist $n \geq 2$ und $A \in M_{n\times n}(K)$, so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j}) \qquad \text{(Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile)}$$

und für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j}) \qquad \text{(Entwicklung nach } j\text{-ten Zeile)}$$

__Bsp:__

$$\begin{vmatrix} {}^{+}2 & {}^{-}4 & {}^{+}{-1} \\ {}^{-}1 & {}^{+}0 & {}^{-}3 \\ {}^{+}1 & {}^{-}{-2} & {}^{+}5 \end{vmatrix} = (-1)\,1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 0 + 24 = 6.$$

Vorzeichen im Schachbrettmuster!

__Bem:__ Die Determinanten $\det(A^{i,j})$ bezeichnet man als die Minoren $(n-1)$-ter Ordnung von A.

Die Cramersche Regel

<u>Satz</u> (Cramersche Regel) Sei $A \in GL_n(K)$, $b \in K^n$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$x_i = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A}$$

(hierbei sind $a^1, \dots, a^n$ die Spalten von A).

Die Determinante eines Endomorphismus

Lemma: Sind $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnliche Matrizen so ist $\det(A) = \det(B)$

Beweis: Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in M_{n\times n}(K)$ mit $B = SAS^{-1}$

$\Rightarrow \det(B) = \det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \cancel{\det(S)}\det(A)\cancel{\det(S)}^{-1}$ $\square$

Def: Sei V ein VR der Dimension n $(1 \leq n < \infty)$ und $\varphi: V \to V$ linear. Wir definieren

$$\det \varphi := \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\varphi,$$

wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V ist.

(Ist $\mathcal{B}'$ eine andere Basis, so sind $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\varphi$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}\varphi$ ähnliche Matrizen. Somit ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.)

Sei K ein Körper. Der K-VR $K[x]$ der Polynome mit Koeffizienten in K besitzt die „übliche" Multiplikation:

$$f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\quad g=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in K[x]$$

$$fg=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

Mit dieser wird $K[x]$ zu einem kommutativen Ring (mit Eins): es gelten die üblichen Rechenregeln ($\cdot$ ist assoziativ, $f=1\cdot f=f\cdot 1$ für alle $f\in K$, Distributivgesetze, Kommutativität). Aber: $K[x]$ ist <u>kein</u> Körper da es i.A. keine multiplikativen Inversen gibt (z.B. besitzt x kein Inverses)

$K[x] \subseteq K(x)=\left\{\frac{f}{g} : f,g\in K[x],\ g\neq 0\right\}$ ist der Körper der rationalen Funktionen.

Betrachtet man $\det : M_{n\times n}(K(x)) \to K(x)$ so folgt aus der Leibniz-Formel:
Ist $A \in M_{n\times n}(K[x])$, so ist auch $\det(A) \in K[x]$!

Bsp: $\begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = x(x+1) - x(x-1) = x^2 + x - x^2 + 1 = x+1$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, ABER $\det A \neq 0 \not\Rightarrow A^{-1} \in M_n(K[x])$!

Analoges gilt für $\mathbb{Z}$, $K[x,y]$, $K[x_1, \dots, x_d]$, ...

Allgemein lässt sich die Determinante für kommutative Ringe mit Eins definieren.