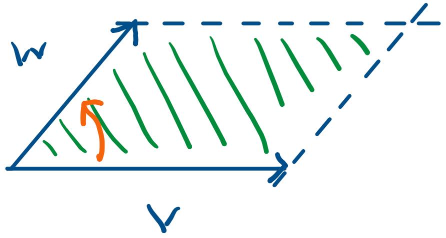
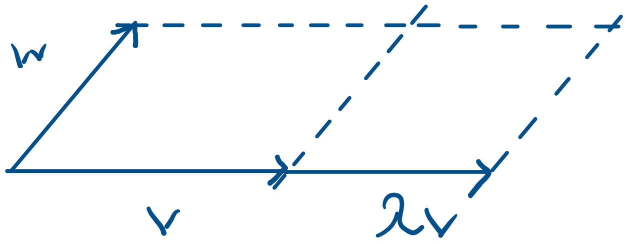
Determinante im $\mathbb{R}^2$ als Fläche: Eigenschaften



$\det[v\ w]$ .. orientierter Flächeninhalt des von v & w aufgespannten Parallelogramms

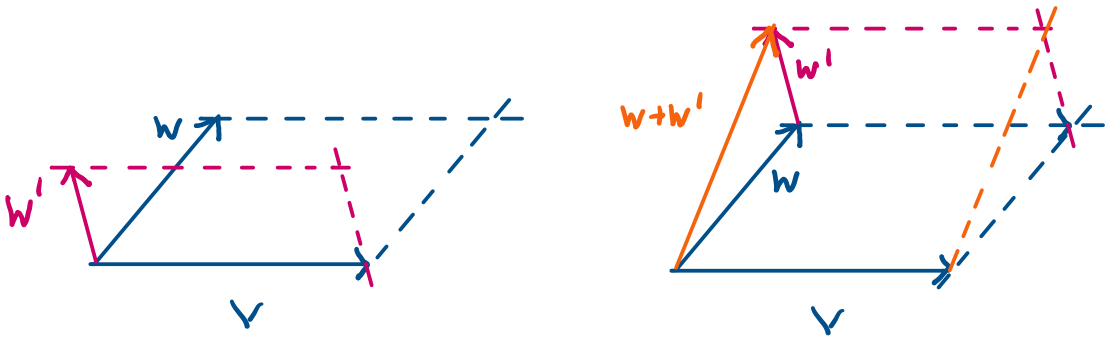
(1)



$\det[\lambda v\ \ w] = \lambda \det[v\ \ w]$, $\det[v\ \ \lambda w] = \lambda \det[v\ \ w]$

(2) $\det[v\ \ v] = 0$

(3)



$\det[v\ \ (w+w')] = \det[v\ \ w] + \det[v\ \ w']$

(elementargeometrisch oder Prinzip von Cavalieri)

$\det[(v+v')\ \ w] = \det[v\ \ w] + \det[v'\ \ w]$

Weiters: Für $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ist $A^T := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ die transponierte Matrix

Wegen $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A^T$ gelten die Eigenschaften analog für Zeilen:

Mit $a = (a_1, a_2)$, $a' = (a_1', a_2')$, $b = (b_1, b_2)$, $b' = (b_1', b_2')$, $\lambda \in K$:

(1') $\det \begin{bmatrix} \lambda a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a \\ \lambda b \end{bmatrix}$

(2') $\det \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = 0$

(3') $\det \begin{bmatrix} a + a' \\ b \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' \\ b \end{bmatrix}$,

$\det \begin{bmatrix} a \\ b + b' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a \\ b' \end{bmatrix}$

DETERMINANTE IM K^n.

Sei von nun an K ein Körper, $n \geq 1$.

<u>Notation</u>: Für eine $n \times n$ quadratische Matrix bezeichnen wir stets mit $a_1, \dots, a_n$ die Zeilenvektoren von A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K)$$

DETERMINANTE IM K^n.

Definition: Eine Abbildung $\det: M_{n\times n}(K) \to K$ heißt **Determinante**, wenn gilt:

(D1) det ist *Linear in jeder Zeile*. D.h. für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

(i) Ist $a_i = b_i + c_i$, so ist

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ c_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(ii) Ist $a_i = \lambda b_i$, so ist

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(D2) det ist *alternierend*. D.h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

(D3) det ist *normiert*. D.h. $\det E = 1$ für die $n\times n$ Einheitsmatrix E.

Bemerkung: (1) Wir sehen (erst später), dass die analogen Eigenschaften für Spalten gelten.

(2) Weder Existenz noch Eindeutigkeit der/einer Determinante sind an dieser Stelle klar.

Satz (Eigenschaften der Determinante) Eine Determinante $\det: M_{n\times n}(K) \to K$ hat folgende weitere Eigenschaften (für alle $A \in M_{n\times n}(K)$)

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (für alle $\lambda \in K$)

(D5) Ist eine Zeile von A gleich Null, so ist $\det A = 0$.

Beweis: (D4) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda A) = \det\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \overset{D1(ii)}{=} \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \ldots = \lambda^n \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det(A)$$

(D5) Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$: $a_i = 0$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{D1}{=} 0 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in K} = 0.$$

Satz (Eigenschaften der Determinante, Fortsetzung)

(D6) Entsteht B aus A durch eine Vertauschung von zwei Zeilen, so ist

$$\det B = -\det A.$$

Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad (i \neq j)$$

$$0 \underset{(D5)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j + a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j + a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{(D1)}{=} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{= \det A} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\underset{D5}{=} 0} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\underset{D5}{=} 0} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{= \det B}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \det A + \det B.$$

Satz (Eigenschaften der Determinante, Fortsetzung)

(D7) Entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile $(i \neq j,\ \lambda \in K)$, so ist $\det B = \det A$.

Beweis:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{= \det A} + \underbrace{\lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{= 0 \quad (D5)} = \det A$$

Satz (Eigenschaften der Determinante, Fortsetzung)

(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}, \quad \text{so ist} \quad \det A = \lambda_1\cdots\lambda_n$$

(Gilt analog auch für untere Dreiecksmatrizen)

Beweis: Fall 1: $\forall i\in\{1,\dots,n\}: \lambda_i\neq 0$

$$\det A \underset{\det}{=} \det\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \underset{D1}{=} \lambda_1\cdots\lambda_n \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{D3}{=} \lambda_1\cdots\lambda_n$$

Fall 2: Es gibt i mit $\lambda_i=0$. Sei $i\in\{1,\dots,n\}$ maximal mit $\lambda_i=0$. D.h. $\lambda_{i+1},\dots,\lambda_n\neq 0$.

$$\det A \underset{\det}{=} \det\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & & & *\\ & \ddots & & & & \vdots\\ & & \lambda_{i-1} & * & \cdots & *\\ & & & 0 & * \cdots & \boxed{*}\\ & & & & \lambda_{i+1} \; * & *\\ & & & & \ddots & *\\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix} \underset{D7}{=} \det\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & \cdots & & *\\ & \ddots & & & & \vdots\\ & & \lambda_{i-1} & * & \cdots & *\\ & & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & & \lambda_{i+1} & * \cdots & *\\ & & & & \ddots & *\\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix} \underset{D5}{=} 0 = \lambda_1\cdots\lambda_n.$$

Satz (Eigenschaften der Determinante, Fortsetzung)

(D9) Sei $n \geq 2$ und $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen $A_1 \in M_{m \times m}(K)$, $A_2 \in M_{(n-m)\times(n-m)}(K)$.

$1 < m < n$

Dann ist $\det A = (\det A_1)\cdot(\det A_2)$

[Hier ohne Beweis.]

(D10) $\det A = 0 \iff \operatorname{rang} A < n.$

Beweis: Durch Vertauschen von Zeilen & Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen lässt sich die Matrix A in eine Zeilenstufenform B überführen:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \det B = \pm \det A$$

$\det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

$\det A = 0 \iff \det B = 0 \iff \lambda_1 \cdots \lambda_n = 0 \iff \operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A < n.$

Satz (Eigenschaften der Determinante)

(D11) Für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Insbesondere: Für $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Achtung! Im Allgemeinen ist $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ und $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$.

Beweis: Ist $\operatorname{rang}(A) < n$, so ist $\operatorname{rang}(AB) < n$ und deshalb $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$ (D10)

Sei $\operatorname{rang} A = n$. Es gibt Elementarmatrizen $C_1, \dots, C_k$ mit $A = C_1 \cdots C_k$.
Dabei können wir sogar annehmen, dass all diese Elementarmatrizen vom Typ $S_i(\lambda)$ oder Q_i^j sind.

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$Q_i^j = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (i < j)$$

Genügt nun zu zeigen: $\forall B' \in M_{n\times n}(K)$: $\det(S_i(\lambda) B') = \det(S_i(\lambda)) \det B'$

und $\det(Q_i^j B') = \det(Q_i^j) \det B'$

Satz (Eigenschaften der Determinante)

(D11) Für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Insbesondere: Für $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Beweis: [...] Genügt nun zu zeigen: $\forall B' \in M_{n\times n}(K)$: $\det(S_i(\lambda)B') = \det(S_i(\lambda)) \det B'$ und

$\det(Q_i^j B') = \det(Q_i^j) \det B'$

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad Q_i^j = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad (i<j)$$

$\det S_i(\lambda) \underset{(D8)}{=} \lambda$ $\qquad$ $\det Q_i^j \underset{(D8)}{=} 1$ $\qquad$ (auch für $i>j$, denn D8 gilt analog für untere Dreiecksmatrizen)

$S_i(\lambda)B'$ ... i-te Zeile mit λ multipliziert $\xRightarrow{(D1)}$ $\det(S_i(\lambda)B') = \lambda \det B'$

$= \det(S_i(\lambda)) \det(B')$

$Q_i^j B'$ ... j-te Zeile zu i-ter Zeile addiert $\xRightarrow{(D7)}$ $\det(Q_i^j B') = 1 \cdot \det B'$

$= \det(Q_i^j) \det B'.$

Satz (Eigenschaften der Determinante)

(D11) Für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Insbesondere: Für $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Achtung! Im Allgemeinen ist $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ und $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$.

Beweis: [...]

Insbesondere: Ist A invertierbar, so existiert die inverse Matrix A^{-1} und $AA^{-1} = E$

$$1 \underset{(D3)}{=} \det E = \det(AA^{-1}) = \underbrace{\det(A)}_{\neq 0 \ (D10)} \cdot \det(A^{-1}) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1}.$$

$\square$

Satz (Eigenschaften der Determinante) Eine Determinante $\det: M_{n\times n}(K) \to K$ hat folgende weitere Eigenschaften (für alle $A \in M_{n\times n}(K)$)

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (für alle $\lambda \in K$)

(D5) Ist eine Zeile von A gleich Null, so ist $\det A = 0$.

(D6) Entsteht B aus A durch eine Vertauschung von zwei Zeilen, so ist $\det B = -\det A$

(D7) Entsteht B aus A durch Addidition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($i \neq j$, $\lambda \in K$), so ist $\det B = \det A$.

(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$ so ist $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

(D9) Sei $n \geq 2$ und $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen $A_1 \in M_{m\times m}(K)$, $A_2 \in M_{(n-m)\times(n-m)}(K)$

Dann ist $\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2)$

(D10) $\det A = 0 \iff \operatorname{rang} A < n$.

(D11) Für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

<u>Insbesondere:</u> Für $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Achtung! Im Allgemeinen ist $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ und $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$.

<u>Beispiel:</u>

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -19 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -19 \\ 0 & 12 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -19 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6) \cdot (-25) = \underline{\underline{-150}}$$

$$\| \qquad - (-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{19}{6} \\ 0 & 12 & 13 \end{vmatrix}$$

Bemerkung: Aufgrund von (D1)(ii), (D6), (D7) wissen wir wie sich die [eine] Determinante unter elementaren Zeilentransformationen verhält.

Da sich jede quadratische Matrix durch solche Transformationen in eine obere Dreiecksmatrix umformen lässt, erhalten wir mit (D8) aus dem Gaussschen Algorithmus ein Verfahren um die Determinante zu berechnen [unter der Annahme, dass es eine Determinante gibt.]

Korollar (Eindeutigkeit der Determinante) Seien $\det, \det' : M_{n\times n}(K) \to K$ Determinanten. Dann ist $\det = \det'$, d.h. $\forall A \in M_{n\times n}(K)$: $\det(A) = \det'(A)$.

Beweis: Sei $A \in M_{n\times n}(K)$.

Durch Vertauschen von Zeilen & der Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen lässt sich A in eine obere Dreiecksmatrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

überführen.

Es gilt $\det B = (-1)^k \det A$ und $\det' B = (-1)^k \det' A$, wobei k die Anzahl der bei der Umformung verwendeten Zeilenvertauschungen ist.

$$\underline{\det A} = (-1)^k \det B = (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^k \det' B = \underline{\det' A}$$

$\square$

Bsp: $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} e_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} e_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} e_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = a_{11}\left(\underbrace{\cancel{a_{21}\begin{vmatrix} e_1 \\ e_1 \\ a_3 \end{vmatrix}}}_{=0} + a_{22}\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ a_3 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} e_1 \\ e_3 \\ a_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{12}\left(a_{21}\begin{vmatrix} e_2 \\ e_1 \\ a_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\cancel{a_{22}\begin{vmatrix} e_2 \\ e_2 \\ a_3 \end{vmatrix}}}_{=0} + a_{23}\begin{vmatrix} e_2 \\ e_3 \\ a_3 \end{vmatrix} \right) + a_{13}\left(a_{21}\begin{vmatrix} e_3 \\ e_1 \\ a_3 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} e_3 \\ e_2 \\ a_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\cancel{a_{23}\begin{vmatrix} e_3 \\ e_3 \\ a_3 \end{vmatrix}}}_{=0} \right)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\underbrace{\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix}}_{=1} + a_{11}a_{23}a_{32}\underbrace{\begin{vmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{vmatrix}}_{=-1} + a_{12}a_{21}a_{33}\underbrace{\begin{vmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{vmatrix}}_{=-1} + a_{12}a_{23}a_{31}\underbrace{\begin{vmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{vmatrix}}_{=(-1)(-1)=1}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}\underbrace{\begin{vmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}}_{=(-1)(-1)=1} + a_{13}a_{22}a_{31}\underbrace{\begin{vmatrix} e_3 \\ e_2 \\ e_1 \end{vmatrix}}_{=-1}$$

Determinante für $n=3$: Regel von Sarrus

Für $n=3$ muss gelten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Merkregel: Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - \; + & + & + \end{array}$$

Existenzbeweis für Determinante mit $n=3$: Überprüfen, dass obige Formel (D1) – (D3) erfüllt.