

Elementarmatrizen

Sei K ein Körper, $n \geq 1$. Sei $E \in M_{n \times n}(K)$ die Einheitsmatrix und E_i^j die Matrix mit 1 an der Stelle (i,j) und 0 überall sonst.

Die folgenden Matrizen heißen **Elementarmatrizen**:

$$S_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = E + (\lambda - 1) E_i^i$$

$\uparrow$
 i -te Spalte

$\nwarrow$
 i -te Zeile

$$(1 \leq i \leq n, \lambda \in K \setminus \{0\})$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = E + \lambda E_i^j$$

$\uparrow$
 i

$\uparrow$
 j

$$P_i^j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = E - E_i^i - E_j^j + E_j^i + E_i^j$$

$\uparrow$
 i

$\uparrow$
 j

$$(1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in K \setminus \{0\})$$

$$S_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_i^j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma: Sei $A \in M_{n \times m}(K)$. Dann ist

(1) $S_i(\lambda)A$ die Matrix die aus A durch Multiplikation der i -ten Zeile mit λ ^($\in K \setminus \{0\}$) entsteht.

(2) $Q_i^j(\lambda)A$ ————— Addition des λ -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile entsteht.

(3) $P_i^j A$ ————— Vertauschen der i -ten & j -ten Zeile entsteht.

Beweis: Exemplarisch (2). Sei $A = (a_{ke})$ mit $1 \leq k \leq n$, $1 \leq e \leq m$.

$$Q_i^j(\lambda)A = (a'_{ke}), \quad Q_i^j(\lambda) = (q_{ke}) \text{ mit } 1 \leq k, e \leq n \text{ wobei: } q_{ke} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=e \\ \lambda & \text{falls } (k,e) = (i,j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall: $k \neq i$: $a'_{ke} = \sum_{v=1}^n q_{kv} \cdot a_{ve} = \underbrace{q_{kk}}_{=1} a_{ke} = a_{ke}.$

Fall: $k=i$: $a'_{ie} = \sum_{v=1}^n q_{iv} a_{ve} = \underbrace{q_{ii}}_{=1} a_{ie} + \underbrace{q_{ij}}_{=\lambda} a_{je} = \underline{a_{ie} + \lambda a_{je}}. \quad \square(2)$

$$S_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_i^j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Lemma: Sei $A \in M_{n \times m}(K)$. Dann ist

- (1) $S_i(\lambda)A$ die Matrix die aus A durch Multiplikation der i -ten Zeile mit λ entsteht.
- (2) $Q_i^j(\lambda)A$ ————— " ————— Addition des λ -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile entsteht.
- (3) $P_i^j A$ ————— " ————— Vertauschen der i -ten & j -ten Zeile entsteht.

Lemma: Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Dann ist

- (1) $AS_i(\lambda)$ die Matrix die aus A durch Multiplikation der i -ten Spalte mit λ entsteht.
- (2) $AQ_i^j(\lambda)$ ————— " ————— Addition des λ -fachen der i -ten Spalte zur j -ten Spalte entsteht.
- (3) AP_i^j ————— " ————— Vertauschen der i -ten & j -ten Spalte entsteht.

$$S_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_i^j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma: Die Elementarmatrizen sind invertierbar und ihre Inversen sind wieder Elementarmatrizen:

$$S_i(\lambda)^{-1} = S_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad Q_i^j(\lambda)^{-1} = Q_i^j(-\lambda) \quad (P_i^j)^{-1} = P_i^j$$

Beweis: Genügt es zu zeigen: $S_i(\lambda) S_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = E$, $Q_i^j(\lambda) Q_i^j(-\lambda) = E$, $P_i^j P_i^j = E$

Notation: Sei $e_i^T = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ ($1 \leq i \leq n$)

Mit dem vorhergehenden Lemma folgt:

$$S_i(\lambda) \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ \lambda e_i^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ e_i^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = E$$

$$Q_i^j(\lambda) \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ e_i^T - \lambda e_j^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = E.$$

$$P_i^j P_i^j = E \quad (v)$$

□

$$S_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad Q_i^j(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad P_i^j = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Satz: Jede invertierbare Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist darstellbar als Produkt von Elementarmatrizen.

Man sagt: Die Gruppe $GL_n(K)$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt.

Bemerkung: Mit $Q_i^j := Q_i^j(1)$ gilt $Q_i^j(\lambda) = S_j(\frac{1}{\lambda}) Q_i^j S_j(\lambda)$ und $P_i^j = Q_j^i Q_i^j(-1) Q_j^i S_j(-1)$.

Also wird $GL_n(K)$ schon von Matrizen der Typen Q_i^j und $S_j(\lambda)$ erzeugt.

$$Q_j^i Q_i^j(-1) Q_j^i = Q_j^i Q_i^j(-1) \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{j-1}^T \\ e_j^T - e_i^T \\ e_{j+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = Q_j^i \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{j-1}^T \\ e_j^T - e_i^T + e_j^T \\ e_{j+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = Q_j^i \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ e_i^T - e_j^T + e_i^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ e_i^T - e_j^T + e_j^T \\ e_{i+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = P_i^j$$

$i < j$

$\leftarrow i$

$\leftarrow j$

□ (*)

Satz: Jede invertierbare Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist darstellbar als Produkt von Elementarmatrizen.

Beweis: Sei $A \in GL_n(K)$.

Mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus lässt sich A mittels Zeilenoperationen in eine Zeilenstufenform

$A' =$

0	...	0	1	*	*	0	*	x	0	*	...
0	...	0	0	0	0	1	*	...	x	0	*
0	...	0	0	0	0	0	0	...	0	1	x
0	...	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0

$k_1 \qquad k_2 \qquad k_3$

...
 $\left[\begin{array}{ccc} x & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & x \end{array} \right] \leftarrow r$
 k_r

Überführen.

Wegen $n = \text{rang}(A) = \text{rang}(A') = r$ folgt $n = r \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = E$.

Drücken wir die Zeilenoperationen durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links aus, folgt: $B_s \cdots B_1 A = E$ mit Elementarmatrizen $B_1, \dots, B_s$.

$$\Rightarrow A = B_s^{-1} \dots B_1^{-1}$$

Anwendung: Berechnung von A^{-1} für $A \in GL_n(K)$

Schema: $[A | E] \rightarrow [B_1 A | B_1 E] \rightarrow \dots \rightarrow [\underbrace{B_s \dots B_1 A}_{= E} | \underbrace{B_s \dots B_1 E}_{= A^{-1}}]$

Analog: Für $A \in M_{m \times n}(K)$ findet man Elementarmatrizen $B_1, \dots, B_s$, $C_1, \dots, C_t$ mit

$$A' = B_s \dots B_1 A C_1 \dots C_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}} \right\} r = \text{rang}(A)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_r$

Schema: $\begin{matrix} m \times m & & n \times n \\ \downarrow & & \downarrow \\ [E & | & A & | & E] \end{matrix}$

↓ Zeilenop.

$$[B_s \dots B_1 | B_s \dots B_1 A | E]$$

↓ Spaltenop.

$$[B_s \dots B_1 | \underbrace{B_s \dots B_1 A C_1 \dots C_t}_{A'} | C_1 \dots C_t]$$

mit $B_s \dots B_1 A$ in Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow r$$

$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_r$

Korollar: Jede $m \times n$ Matrix A ist äquivalent zu einer Matrix der Form

$$A_r = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \quad \text{mit } r = \text{rang}(A) \quad (A_r \in M_{m \times n}(K))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_r$
 $\left. \hspace{10em} \right\} r$

(A ist äquivalent zu A_r bedeutet: $\exists S \in GL_m(K) \exists T \in GL_n(K): A = S A_r T$.)

Korollar: Zwei $m \times n$ Matrizen A, A' sind äquivalent $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A')$

Determinanten: Motivation im 2-Dimensionalen

(1) Lineare Gleichungssysteme

Betrachten ein lineares 2×2 GLS:

$$\begin{aligned} \text{(I): } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ \text{(II): } a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (a_{ij}, b_i \in K)$$

Versuchen zu Lösen und vermeiden dabei Division:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{22} \text{(I)} - a_{12} \text{(II): } (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ a_{11} \text{(II)} - a_{21} \text{(I): } \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{=: \det(A)} x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

„Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“

$$\begin{aligned} \text{(I): } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ \text{(II): } a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{aligned}$$

Ist $\det A \neq 0$ so ist

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(Cramer'sche Regel für $n=2$)

die (einzige) Lösung des GLS
[notwendig ✓ hinreichend: einsetzen!]

Proposition: $A \in M_{2 \times 2}(K)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Proposition: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Beweis: Zeigen: Die Spalten von A sind linear abhängig
 $\Leftrightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

O.E: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ und $(a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}) \neq 0$ [sonst trivial]

$$\Leftarrow " \quad a_{22} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} - a_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow " \quad \text{Sei } \lambda \in K: \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_{11} = \lambda a_{12}, \quad a_{21} = \lambda a_{22}$$

$$\Rightarrow \det A = \lambda a_{12} a_{22} - \lambda a_{12} a_{22} = 0.$$

□

Anwendungsbsp: Inverse einer 2×2 Matrix

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$ invertierbar ($\Rightarrow \det A = ad - bc$)

Um A^{-1} zu berechnen, müssen wir $A \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ lösen.

Cramer'sche Regel:

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \quad x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}$$
$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A}, \quad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A}$$

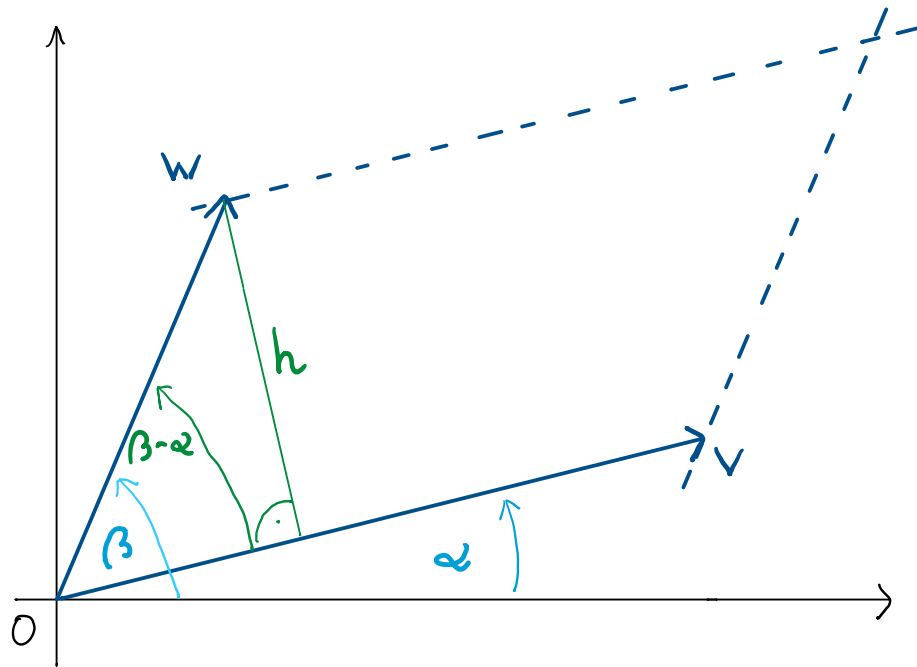
Haben gezeigt:

Proposition: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(2) (Orientierte) Fläche eines Parallelogramms in $\mathbb{R}^2$.

Wir betrachten das von $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm:



$$v = \|v\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad w = \|w\| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$h = \|w\| \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

Fläche A des Parallelogramms

$$\begin{aligned} \underbrace{A}_{\substack{\text{Grundlinie} \\ \downarrow}} &= \underbrace{\|v\|}_{\substack{\text{Höhe} \\ \uparrow}} h = \|v\| \|w\| \sin(\beta - \alpha) \\ &= \|v\| \|w\| (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \cdot \sin \alpha) = (x) \end{aligned}$$

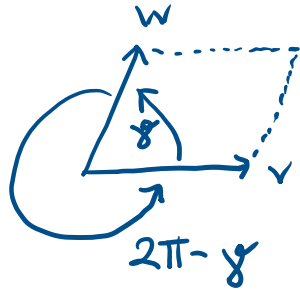
$$(x) = \|v\| \|w\| \sin \beta \cos \alpha - \|v\| \|w\| \cos \beta \sin \alpha$$

$$= \begin{vmatrix} \|v\| \cos \alpha & \|w\| \cos \beta \\ \|v\| \sin \alpha & \|w\| \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$



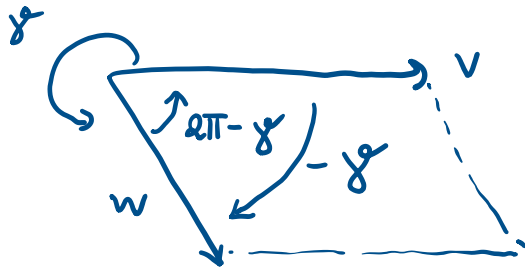
 Überlegung gilt so nur für $0 \leq \underbrace{\beta - \alpha}_{= \gamma} \leq \pi$

$0 \leq \gamma \leq \pi$:



$$\Rightarrow A = \det[v \ w]$$

$\pi < \gamma < 2\pi$:



$$\Rightarrow [\dots] \Rightarrow A = -\det[v \ w] \quad (= \det[w \ v])$$

Die Determinante entspricht einem orientierten Flächeninhalt:

- (Spitzer = kürzerer) Winkel zw. v und w gegen den Uhrzeigersinn $\hat{=}$ positive Determinante
- $\hat{=}$ negative Determinante.
- $y=0 \iff \det A=0$