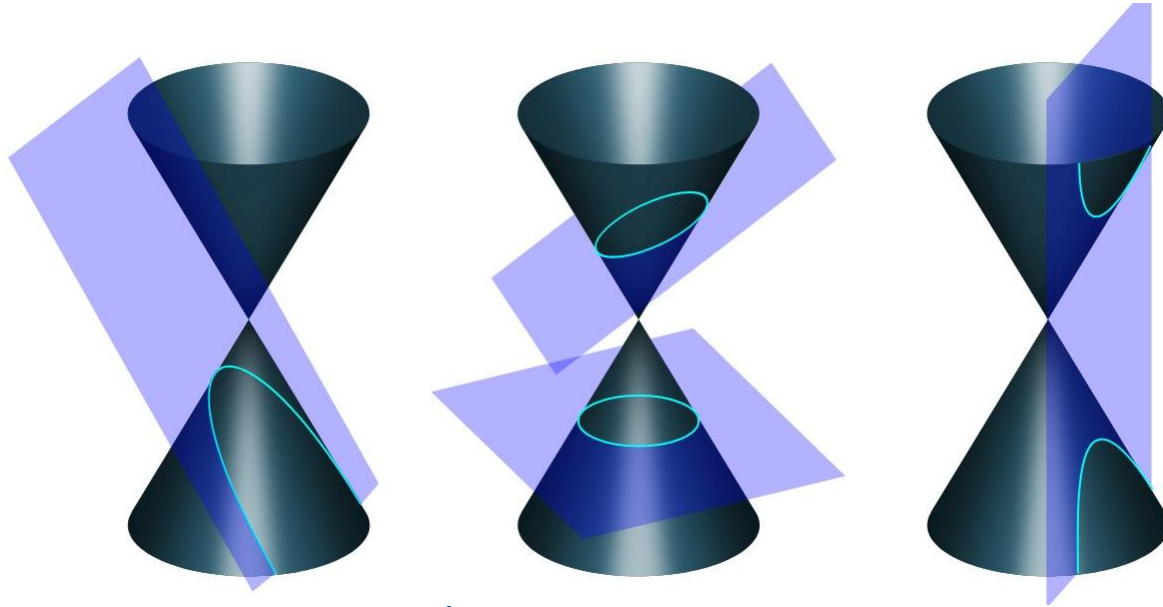


## Kegelschnitte (Quadriken im $\mathbb{R}^2$ )



(Quelle: Wikipedia DE)

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$ax + by + cz = 0 \quad \text{mit} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Definition Eine Menge  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Quadrik**, wenn es  $a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}, a_{1,0}, a_{0,1}, a_{0,0} \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_{2,0} x_1^2 + a_{1,1} x_1 x_2 + a_{0,2} x_2^2 + a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} = 0 \right\}$$

wobei  $(a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2}) \neq (0, 0, 0)$

Im  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet man eine Quadrik auch als **Kegelschnitt**.

Kompaktere Schreibweise für quadratische Funktionen:

$$q(x_1, x_2) = \underbrace{\alpha_{2,0} x_1^2 + \alpha_{1,1} x_1 x_2 + \alpha_{0,2} x_2^2}_{= x^T A x} + \underbrace{\alpha_{1,0} x_1 + \alpha_{0,1} x_2}_{= b^T x} + \underbrace{\alpha_{0,0}}_{= c}$$

$$c := \alpha_{0,0}$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} \\ \alpha_{0,1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{2,0} & \alpha_{1,1}/2 \\ \alpha_{1,1}/2 & \alpha_{0,2} \end{pmatrix}$$

$$x^T A x = x^T \begin{pmatrix} \alpha_{2,0} x_1 + \frac{\alpha_{1,1}}{2} x_2 \\ \frac{\alpha_{1,1}}{2} x_1 + \alpha_{0,2} x_2 \end{pmatrix} = \alpha_{2,0} x_1^2 + \underbrace{\frac{\alpha_{1,1}}{2} x_1 x_2 + \frac{\alpha_{1,1}}{2} x_1 x_2}_{= \alpha_{1,1} x_1 x_2} + \alpha_{0,2} x_2^2$$

$$A^T = A$$

D.h., jedes quadratische Polynom  $q(x_1, x_2) \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$  lässt sich schreiben als

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}^2, \quad A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch}$$

(Analog für  $n$  Variablen)

# Transformation von Quadriken

Def: Eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt **affin linear**, wenn es  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^2$  gibt derart, dass

$$f(x) = Ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Eine solche Abbildung heißt

- **Affinität**, wenn  $A \in GL_2(\mathbb{R})$  ( $\Leftrightarrow f$  ist bijektiv)
- **Isometrie** oder **Bewegung**, wenn  $A \in O_2$  ( $\Leftrightarrow f$  erhält Längen)
- **eigentliche** [uneigentliche] **Bewegung**, wenn  $A \in SO_2$  [ $A \in O_2 \setminus SO_2$ ]

Bemerkung: Hintereinanderausführungen derartiger Abbildungen sind wieder von derselben Form.  
(außer für uneigentliche Bewegung)

Das gleiche gilt für Umkehrabbildungen (falls  $A$  invertierbar ist)

$$[y = Ax + b \Leftrightarrow y - b = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}(y - b) = A^{-1}y - \underline{A^{-1}b}]$$

Ziel: Eine Quadrik  $Q$  bzw. das definierende Polynom  $q(x)$  durch (eigentliche) Bewegungen des  $\mathbb{R}^2$  auf möglichst einfache Form transformieren („**Hauptachsentransformation**“)

Sei  $q(x) = x^T A x + b^T x + c$  eine quadratische Funktion ( $A = A^T$ ), und

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto Sx + d$  eine Affinität

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2: q(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$f(Q) = \{ \underbrace{f(x)}_{=y} \in \mathbb{R}^2: x \in \mathbb{R}^2, q(x) = 0 \} = \{y \in \mathbb{R}^2: q(f^{-1}(y)) = 0\}$$

$$y = f(x) = Sx + d \Leftrightarrow x = S^{-1}y - S^{-1}d, \quad T := S^{-1}, \quad e := -S^{-1}d \quad \text{d.h.} \quad \overset{-1}{f}(y) = Ty + e$$

$$\begin{aligned} q(f^{-1}(y)) &= (Ty + e)^T A (Ty + e) + b^T (Ty + e) + c \\ &= \underbrace{(Ty)^T A (Ty)} + \underbrace{e^T A (Ty)} + \underbrace{(Ty)^T A e} + \underbrace{e^T A e} + \underbrace{b^T (Ty)} + \underbrace{b^T e} + \underbrace{c} \\ &= \underbrace{y^T (T^T A T)} y + \underbrace{(T^T A^T e + T^T b + T^T A e)^T}_{=: b'} y + \underbrace{e^T A e + c + b^T e}_{=: c'} \end{aligned}$$

$$e^T A (Ty) = ((e^T A T)^T)^T y = (T^T A^T e)^T y$$

$$b^T Ty = (T^T b)^T y$$

$$(Ty)^T A e = ((Ty)^T A e)^T = e^T A^T Ty = ((e^T A^T T)^T)^T y = (T^T A e)^T y$$

$$\Rightarrow q(f^{-1}(y)) = y^T A' y + (b')^T y + c'$$

$$\text{Ist } \underline{A = A^T}: \quad T^T A e = T^T A^T e \Rightarrow b' = T^T b + 2T^T A e$$

$$A' := T^T A T$$

$$q(f^{-1}(y)) = y^T \underbrace{(T^T A T)}_{A'} y + \underbrace{(T^T A e + T^T A^T e + T^T b)}_{b'} y + \underbrace{(e^T A e + b^T e + c)}_{c'}$$

2 Spezialfälle:

1.  $f(x) = Sx$ ,  $S \in SO_2$ ,  $x = f^{-1}(y) = S^T y$

$$\Rightarrow q'(y) = q(f^{-1}(y)) = y^T (S A S^T) y + (S b)^T y + c$$

2.  $f(x) = x + d$ ,  $x = f^{-1}(y) = y - d$  und  $A$  ist symmetrisch

$$\Rightarrow q'(y) = q(f^{-1}(y)) = y^T A y + (b - 2A d)^T y + (c - b^T d + d^T A d)$$

## Hauptachsentransformation

Sei  $q(x) = x^T A x + b^T x + c$  mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  symmetrisch,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  
und  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$ .

1. Schritt: Weil  $A$  symmetrisch ist, ist  $A$  mittels einer orthogonalen Matrix  $S \in O_2$  diagonalisierbar:  $S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Wir können sogar  $S \in SO_2$  annehmen:

Ist  $S \in O_2 \setminus SO_2$ , so ist  $S' = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO_2$  und

$$(S')^T A S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S^T A S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto S^T x$$

$$q_1(y) := q(P(y)) \stackrel{x=Sy}{=} y^T \underbrace{S^T A S}_{=: A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} y + \underbrace{(S^T b)^T}_{=: b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix}} y + c = y^T A_1 y + b_1^T y + c$$

$$q_1(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \beta_{1,1} y_1 + \beta_{1,2} y_2 + c \quad (\text{kein } y_1 y_2 \text{ Term!})$$

$$q_1(y) = y^T A_1 y + b_1^T y + c \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix} \quad P_1(Q) = \{y \in \mathbb{R}^2 : q_1(y) = 0\}.$$

Fall 1:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ( $\Leftrightarrow A_1 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ )

Dann ist  $q_1(y) = b_1^T y + c$  affin linear.

$$P_1(Q) = \begin{cases} \text{Gerade} & \text{falls } b_1 \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{falls } b_1 = 0, c = 0 \\ \emptyset & \text{falls } b_1 = 0, c \neq 0 \end{cases}$$

$$q_1(y) = y^T A_1 y + b_1^T y + c \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix} \quad P(Q) = \{y \in \mathbb{R}^2 : q_1(y) = 0\}.$$

Fall 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  ( $\Leftrightarrow \det(A_1) = \det(A) \neq 0$ )

2. Schritt: Wir wollen durch eine Verschiebung  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto \underbrace{y - d}_{=z}$  den linearen Teil eliminieren.

$$q_2(z) = q_1(f_2^{-1}(z)) \underset{y=z+d}{=} z^T A_1 z + (b_1 - 2A_1 d)^T z + (c - b_1^T d + d^T A_1 d)$$

$b_1 - 2A_1 d = 0 \Leftrightarrow A_1 d = \frac{b_1}{2}$  ist eindeutig für  $d \in \mathbb{R}^2$  lösbar, da  $A_1$  invertierbar.

$$q_2(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \gamma \quad \text{mit } \gamma \in \mathbb{R}.$$



$$q_1(y) = y^T A_1 y + b_1^T y + c \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$P(Q) = \{y \in \mathbb{R}^2 : q_1(y) = 0\}.$$

Fall 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$$q_2(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \gamma$$

Fall 2a:  $\gamma \neq 0$

$$q_2(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(-\frac{\lambda_1}{\gamma}\right)}_{=\mu_1} z_1^2 + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_2}{\gamma}\right)}_{=\mu_2} z_2^2 = 1$$

$\mu_1, \mu_2 > 0$ :  $\mu_i = \frac{1}{a_i^2}$

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$$

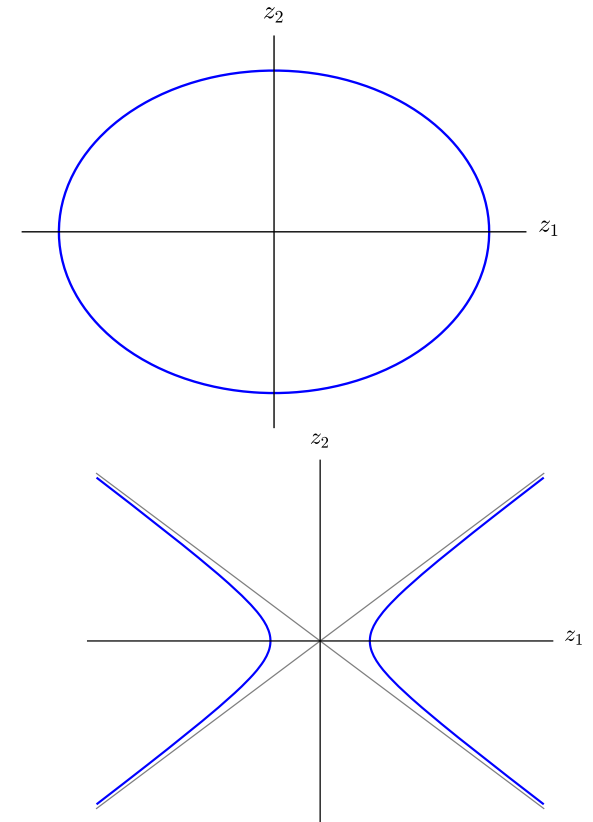
Ellipse

$\mu_1, \mu_2 < 0$ :  $\emptyset$

$\mu_1 > 0 > \mu_2$  (oE, sonst Drehung um  $\pi/2$ )

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$$

Hyperbel



Fall 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$        $q_2(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \gamma$

Fall 2b:  $\gamma = 0$        $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ :     $\mathbb{Q}$     Punkt

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ :     $\mathbb{Q}$     Punkt

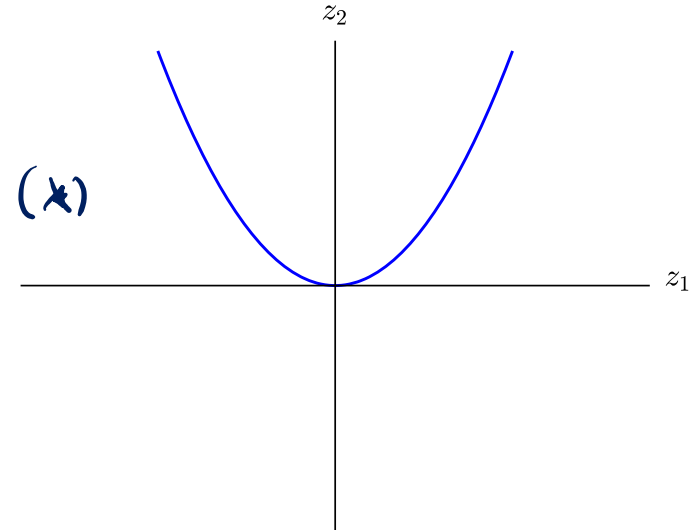
$\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ :       $z_2^2 - \underbrace{\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}_{=\mu^2} z_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_2^2 - \mu z_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z_2 - \mu z_1)(z_2 + \mu z_1) = 0$

$$q_1(y) = y^T A_1 y + b_1^T y + c \quad \text{mit} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \neq \beta_1 \\ \neq \beta_2 \end{matrix} \quad P(Q) = \{y \in \mathbb{R}^2 : q_1(y) = 0\}.$$

Fall 3:  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  ( $\Leftrightarrow \text{rank } A_1 = \text{rank } A = 1$ )

$$\lambda_1 z_1^2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \underbrace{\left(z_1 - \frac{\beta_1}{2\lambda_1}\right)^2}_{z_1'} + \frac{\beta_1^2}{4\lambda_1} + \beta_2 z_2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 (z_1')^2 + \beta_2 z_2 + c' = 0 \quad (*)$$



Fall 3a:  $\beta_2 \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_1 (z_1')^2 + \beta_2 \underbrace{\left(z_2 - \frac{c'}{\beta_2}\right)}_{z_2'} = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 (z_1')^2 + \beta_2 z_2' = 0$$

$$\Leftrightarrow z_2' = -\frac{\lambda_1}{\beta_2} (z_1')^2 \quad \Leftrightarrow 2z_2' = \frac{(z_1')^2}{a_1^2} \quad \text{Parabel}$$

Drehung

Fall 3b:  $\beta_2 = 0$ ;  $(z_1')^2 = y$

$y = 0$ : Gerade („doppelt“)

$y > 0$ : 2 parallele Geraden

$y < 0$ :  $\emptyset$

# Satz (Hauptachsentransformation für Quadriken im $\mathbb{R}^2$ )

Zu jeder Quadrik  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T A x + b^T x + c = 0\}$  im  $\mathbb{R}^2$  mit  $A \neq 0$  gibt es eine (eigentliche) Bewegung des  $\mathbb{R}^2$  derart, dass  $P(Q)$  durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben wird ( $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ):

- $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$  (Ellipse)

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \quad (2 \text{ sich schneidende Geraden})$$

- $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$  (Hyperbel)

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} = 1 \quad (2 \text{ parallele Geraden})$$

- $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} = 2x_2$  (Parabel)

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} = 0 \quad (1 \text{ Gerade})$$

$$-\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \quad -\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \quad (\text{leere Menge})$$

Bsp:  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T A x + b^T x + c$$

$$c = 2, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[...]  $S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in SO_2$        $S^T A S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_1(x) = S^T x = y \quad x = S y \quad S^T b = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

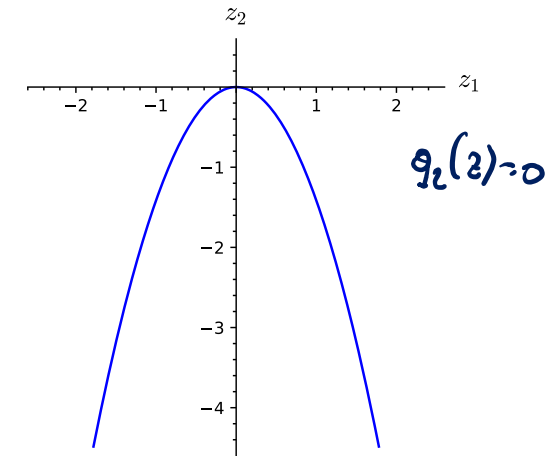
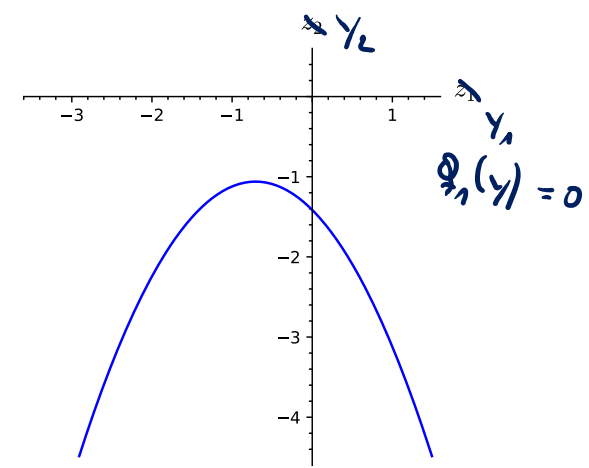
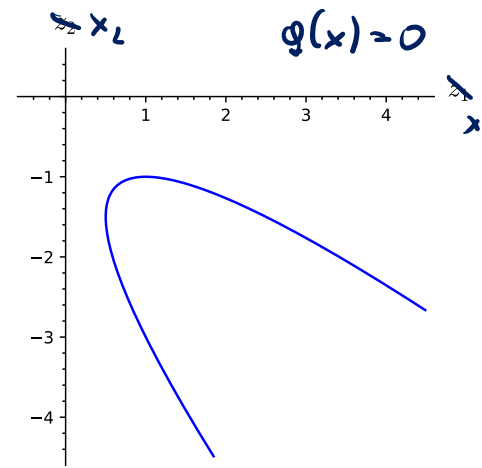
$$q_1(y) = q(p_1^{-1}(y)) = y^T S^T A S y + \underbrace{b^T S y}_{(S^T b)^T} + c = 2y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 2$$

$$= 2\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{2}y_2 + 2 = 2\underbrace{\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}_{z_1} + \sqrt{2}\underbrace{\left(y_2 + \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)}_{z_2}$$

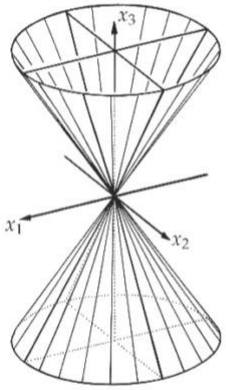
$$q_2(z) = 2z_1^2 + \sqrt{2}z_2$$

$$z = S^T x + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 7/4\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow x = S\left(z - \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 7/4\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Scheitelpunkt: } -S \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 7/4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ -9/8 \end{pmatrix}$$

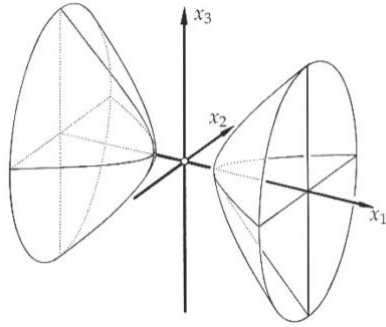


Bemerkung: Die Hauptachsentransformation lässt sich analog im  $\mathbb{R}^n$  durchführen.  
 → Fischer, Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie, 4. Aufl., 2019.  
 Kapitel 5.2.6, 5.2.7 und 5.3.9.



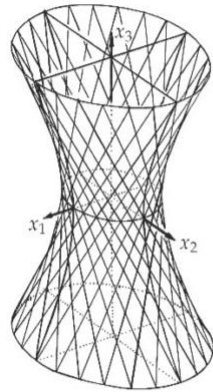
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$$

elliptischer  
Kegel



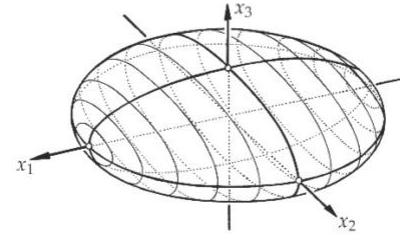
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

zweischaliges  
Hyperboloid



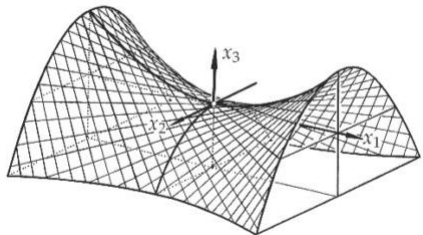
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

einschaliges  
Hyperboloid



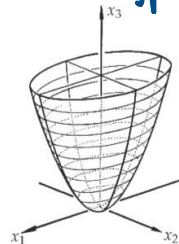
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

Ellipsoid



$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

hyperbolisches  
Paraboloid



$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

elliptisches  
Paraboloid

### Bemerkung:

- Die allgemeine Betrachtung von durch Polynome definierte Mengen führt zur Algebraischen Geometrie.