Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei V ein endlich-dim K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Def:

(1) Ein Endomorphismus $\varphi: V \to V$ ist selbstadjungiert, wenn $\varphi = \varphi^*$ gilt. D.h., wenn

$$\forall v, v' \in V: \quad \langle v, \varphi(v') \rangle = \langle \varphi(v), v' \rangle$$

(2) $A \in M_{n \times n}(K)$ heißt symmetrisch $\Leftrightarrow$ $A = A^T$

— " — selbstadjungiert (oder hermitesch) $\Leftrightarrow$ $A = A^*$

(Für $K = \mathbb{R}$ ist $A^T = A^*$)

Lemma: Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von V, $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus, und $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Dann: φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A selbstadjungiert

Beweis: Ist $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, so ist $A^* = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi^*)$.

Lemma: Sei $\varphi: V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

(1) Jeder Eigenwert von φ ist reell (auch für $K = \mathbb{C}$!)

(2) Sind v, w Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$, so folgt $v \perp w$.

Beweis:

(1) Sei λ ein EW von φ mit EV $v \neq 0$, zu λ.

$$\lambda \cancel{\langle v, v \rangle} = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \cancel{\langle v, v \rangle}$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) $$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \bar{\lambda} v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

$\square$

Satz: Sei $\varphi: V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von φ.

$$\Rightarrow \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Korollar: (1) Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so gibt es ein $S \in SO_n$, derart, dass

$$S^T A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

(2) Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch, so gibt es ein $S \in U_n$, derart, dass

$$S^* A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Folgt aus dem Satz. Für (1) erhält man zuerst $S \in O_n$.
Ist $\det S = -1$, so multipliziert man eine Zeile mit -1.

Satz: Sei $\varphi: V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von φ.

Beweis: (1) Das charakteristische Polynom P_φ zerfällt <u>über $\mathbb{R}$</u> in Linearfaktoren

$A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \Rightarrow A$ ist hermitesch $\Rightarrow \psi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ x \mapsto Ax$ ist selbstadjungiert.

$P_\varphi = P_A = P_\psi \in \mathbb{C}[X]$

$\Rightarrow \quad P_\varphi = \pm (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad$ mit $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$\xRightarrow[\text{Lemma}]{\psi \text{ selbstadj.}} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$

Satz: Sei $\varphi: V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von φ.

Beweis: (1) Das charakteristische Polynom P_φ zerfällt <u>über $\mathbb{R}$</u> in Linearfaktoren ✓

(2) Induktion nach n. $n=0$ ✓

<u>$n-1 \to n$, $n \geq 1$:</u> Sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ EW von φ und $v_1 \in K^n$ ein zugehöriger EV.

$$W := \mathcal{L}(\{v_1\})^\perp \longrightarrow V = \mathcal{L}(\{v_1\}) \oplus W$$

<u>Beh:</u> $\varphi(W) \subseteq W$

<u>Bew. d. Beh:</u> Sei $w \in W$, d.h. $w \perp v_1$. <u>zz:</u> $\varphi(w) \perp v_1$

$$\langle \varphi(w), v_1 \rangle = \langle w, \varphi(v_1) \rangle = \langle w, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \varphi(w) \perp v_1 \qquad \square \text{ (Beh.)}$$

$\to \varphi|_W : W \to W$ ist selbstadjungiert $\xRightarrow{IV} \exists\, \mathcal{B}' = (b_2, \dots, b_n)$ eine ONB von W bestehend aus EV von $\varphi|_W$.

$\Rightarrow (v_1, b_2, \dots, b_n)$ ist eine ONB von V bestehend aus EV von φ.

$\square$

Abstand von Geraden

Seien $g = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda w, \lambda \in \mathbb{R} \}$,

$g' = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \lambda w', \lambda \in \mathbb{R} \}$

mit $Q, Q' \in \mathbb{R}^3$, $w, w' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zwei Geraden im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.

Def: $d(g,g') := \inf \{ \| \overrightarrow{PP'} \| : P \in g, P' \in g' \}$ ist der Abstand zwischen g und g'

Es wird später klar, dass es sich hier tatsächlich um ein Minimum handelt.

Mögliche Lagen von Geraden im $\mathbb{R}^3$:

- g und g' sind parallel $\Leftrightarrow$ w, w' sind linear abhängig
  $\Rightarrow$ entweder $g = g'$ oder $g \cap g' = \emptyset$
- Sind g, g' nicht parallel:
  - g, g' schneiden sich in einem eindeutigen Schnittpunkt, oder
  - g, g' sind windschief

Lemma: g und g' sind genau dann windschief, wenn $\overrightarrow{QQ'}$, w, w' linear unabhängig sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Ang. $\exists \lambda, \mu, \mu' \in \mathbb{R}$, nicht alle 0: $\quad 0 = \lambda \overrightarrow{QQ'} + \mu w + \mu' w' = \lambda \overrightarrow{OQ'} - \lambda \overrightarrow{OQ} + \mu w + \mu' w'$

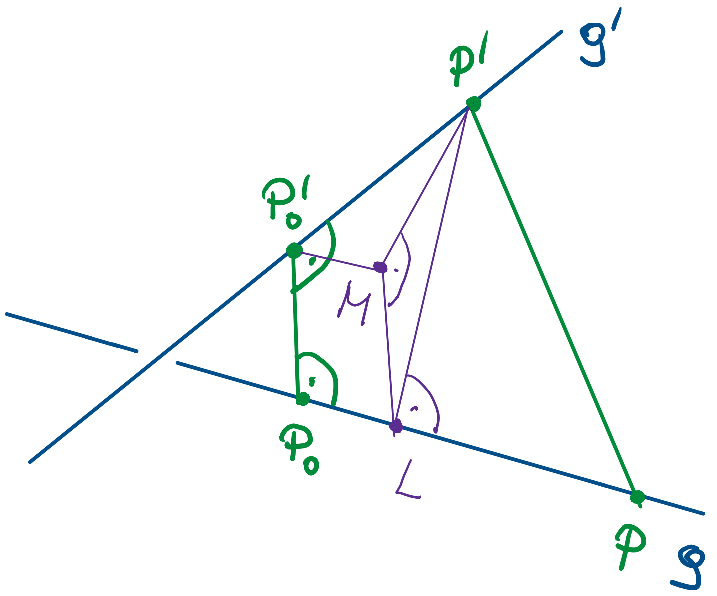
O.E. $\lambda \neq 0$. $\quad \overrightarrow{OQ} - \frac{\mu}{\lambda} w = \overrightarrow{OQ'} + \frac{\mu'}{\lambda} w' \in g \cap g'$ $\lightning$

„$\Leftarrow$": g, g' sind parallel $\Rightarrow w, w'$ lin. abh.

$g \cap g' \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mu, \mu'$: $\quad \overrightarrow{OQ} + \mu w = \overrightarrow{OQ'} + \mu' w' \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} + \mu' w' - \mu w = 0$

$\square$

Lemma: Angenommen $P_0 \in g$ und $P_0' \in g'$ sind Punkte derart, dass $\overrightarrow{P_0P_0'}$ senkrecht zu w und w' ist. Dann ist $d(g,g') = \|\overrightarrow{P_0P_0'}\|$.



Beweis: Fall 1: $P_0 = P_0'$. $0 = \|\overrightarrow{P_0P_0'}\| = d(g,g')$ ✓

Fall 2: $P_0 \neq P_0'$. zz: $\forall P \in g \; \forall P' \in g'$: $\|\overrightarrow{PP'}\| \leq \|\overrightarrow{P_0P_0'}\|$

Sei $L \in g$ mit $\langle \overrightarrow{LP'}, w \rangle = 0$

$\xrightarrow{\text{Pythagoras}}$ $\|\overrightarrow{LP'}\| \leq \|\overrightarrow{PP'}\|$

Sei M der Punkt mit $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{P_0P_0'}$

Beh: $\underbrace{\overrightarrow{LM}}_{\overrightarrow{P_0P_0'}} \perp \overrightarrow{MP'}$ $\qquad \overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{MP_0'} + \overrightarrow{P_0'P'} = \overrightarrow{LP_0} + \overrightarrow{P_0'P'} = \lambda w + \mu w'$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\langle \overrightarrow{LM}, \overrightarrow{MP'} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_0'}, \lambda w + \mu w' \rangle = 0.$ $\qquad \square$ (Beh.)

$\xrightarrow{\text{Pythagoras}}$ $\|\overrightarrow{P_0P_0'}\| = \|\overrightarrow{LM}\| \leq \|\overrightarrow{LP'}\| \leq \|\overrightarrow{PP'}\|$

$\square$

Seien jetzt g, g' windschief. Wir möchten $d(g,g')$ berechnen.

Lemma: Sei (b_1, b_2, b_3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$

(1) Ist $v \in \mathbb{R}^3$ und $\langle v, b_i\rangle = 0$ für $i \in \{1,2,3\}$, so ist $v = 0$.

(2) $(b_2 \times b_3,\ b_1 \times b_3,\ b_2 \times b_1)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Beweis: (1) Sei $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$

$$\Rightarrow \langle v, v\rangle = \langle v, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3\rangle = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underbrace{\langle v, b_i\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow v = 0.$$

(2) Sei $\underbrace{\lambda_1 (b_2 \times b_3) + \lambda_2 (b_1 \times b_3) + \lambda_3 (b_2 \times b_1)}_{=:A} = 0$

$\langle x \times y, z\rangle = \det(x\ y\ z)$

$$0 = \langle A, b_1\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle b_2 \times b_3, b_1\rangle}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$0 = \langle A, b_2\rangle = \lambda_2 \overbrace{\langle b_1 \times b_3, b_2\rangle}^{\neq 0} \Rightarrow \lambda_2 = 0, \qquad 0 = \langle A, b_3\rangle \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$\square$

Bem: Zu (1) allgemeiner: Ist V ein endlich-dim. Innerer-Produkt-Raum und $(f_1, \dots, f_n)$ eine Basis von V^*, so gilt

$$\forall v \in V: \left[v = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: f_i(v) = 0 \right]$$

Seien $g = \{P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda w, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $g' = \{P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \lambda w', \lambda \in \mathbb{R}\}$

windschiefe Geraden.

<u>Gesucht</u>: $P_0 \in g$, $P_0' \in g'$ mit $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w$ und $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w'$ $\quad (*)$

<u>Notwendige Bedingungen</u>: Angenommen P_0, P_0' erfüllen $(*)$

$$\overrightarrow{P_0P_0'} = \lambda (w \times w') \qquad \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OQ} - \mu w, \qquad \overrightarrow{OP_0'} = \overrightarrow{OQ'} + \mu' w'. \qquad (\lambda, \mu, \mu' \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad \lambda (w \times w') = \overrightarrow{P_0P_0'} = \overrightarrow{QQ'} + \mu' w' + \mu w \qquad (**)$$

$\langle (**), w \times w' \rangle$: $\quad \lambda \|w \times w'\|^2 = \langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle \Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}{\|w \times w'\|^2}$

$\langle (**), w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle$: $\quad \lambda \langle w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle = \mu \langle w, w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\cancel{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}}{\|w \times w'\|^2} \cdot \frac{\langle w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle}{\cancel{\langle w, w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle}} = \frac{\langle w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle}{\|w \times w'\|^2}$$

$\langle (**), \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle$: $\quad \lambda \langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle = \mu' \langle w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle$

$$\Rightarrow \mu' = \frac{\cancel{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}}{\|w \times w'\|^2} \cdot \frac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}{\cancel{\langle w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}} = \frac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}{\|w \times w'\|^2}$$

Gesucht: $P_0 \in g$, $P_0' \in g'$ mit $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w$ und $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w'$ $(*)$

Hinreichend: Seien P_0, P_0' mit $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OQ} - \mu w$ und $\overrightarrow{OP_0'} = \overrightarrow{OQ'} + \mu' w'$

mit $\mu = \dfrac{\langle w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle}{\|w \times w'\|^2}$ und $\mu' = \dfrac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}{\|w \times w'\|^2}$.

zz: $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w$ und $\overrightarrow{P_0P_0'} \perp w'$

Setze $z := \lambda (w \times w') - (\underbrace{\overrightarrow{QQ'} + \mu w + \mu' w'}_{\overrightarrow{P_0P_0'}})$ mit $\lambda = \dfrac{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}{\|w \times w'\|^2}$

Genügt zz: $z = 0$

Da g, g' windschief sind, ist $(w, w', \overrightarrow{QQ'})$ Basis von $\mathbb{R}^3$

$\longrightarrow$ $(w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{QQ'} \times w)$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{aligned}
\langle z, w \times w' \rangle &= \lambda \|w \times w'\|^2 - \langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle = 0 \\
\langle z, w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle &= \frac{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}{\|w \times w'\|^2} \langle w \times w', w' \times QQ' \rangle - \frac{\langle w \times w', w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle}{\|w \times w'\|^2} \langle w, w' \times \overrightarrow{QQ'} \rangle = 0 \\
\langle z, \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle &= \frac{\langle \overrightarrow{QQ'}, w \times w' \rangle}{\|w \times w'\|^2} \langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle - \frac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}{\|w \times w'\|^2} \langle w', \overrightarrow{QQ} \times w \rangle = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 0.$$

Wir haben damit bewiesen:

Satz: Seien $g = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda w, \lambda \in \mathbb{R} \}$, $g' = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \lambda w', \lambda \in \mathbb{R} \}$ mit $Q, Q' \in \mathbb{R}^3$, $w, w' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zwei windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$.

Seien $P_0 \in g$ und $P_0' \in g'$ mit $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OQ} + \mu w$ und $\overrightarrow{OP_0'} = \overrightarrow{OQ'} + \mu' w'$ wobei

$$\mu = \frac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w' \rangle}{\| w \times w' \|^2}, \quad \mu' := \frac{\langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \times w \rangle}{\| w \times w' \|^2}.$$

Dann ist $d(g, g') = \| \overrightarrow{P_0 P_0'} \| = \dfrac{| \langle w \times w', \overrightarrow{QQ'} \rangle |}{\| w \times w' \|}$.