Zusammenfassung:

SO_2 .... Drehungen der Ebene $\mathbb{R}^2$ (um den Ursprung)

O_2 ... ——— 〃 ——— und Spiegelungen an einer Gerade durch den Ursprung

SO_3 ... Drehungen im $\mathbb{R}^3$ um eine Achse durch den Ursprung

O_3 ... Drehungen/Spiegelungen im $\mathbb{R}^3$.

Satz: Zu jeder Matrix $A \in SO_3$ gibt es eine Matrix $S \in SO_3$ und einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ derart, dass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Korollar („Satz vom Fußball") Sei $A \in SO_3$ und $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r \}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, so hat $\varphi_A|_S$ mindestens zwei antipodische Fixpunkte, d.h. $\exists x_0 \in S$: $\varphi_A(x_0) = x_0$ und $\varphi_A(-x_0) = -x_0$

Beweis: Genügt zz: $\exists x_0 \in S$: $Ax_0 = x_0$

$A \in SO_3 \xRightarrow{\text{Satz}} A$ hat EW $1 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^3$: $Ax_1 = x_1$ $\quad (x_1 \neq 0)$

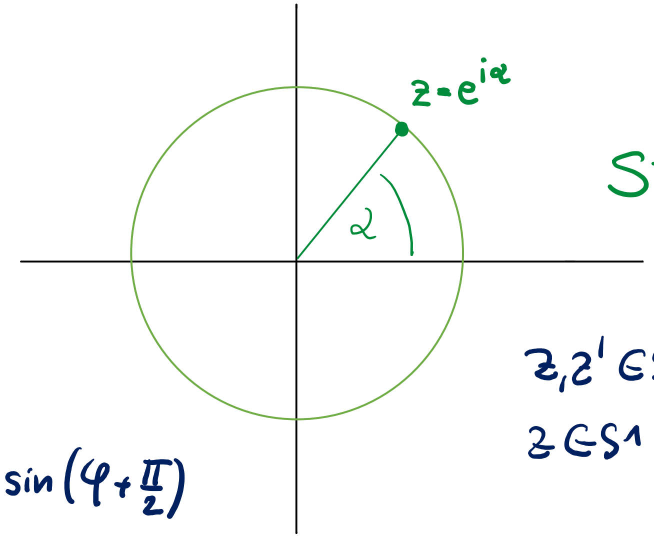
$x_0 := \frac{x_1}{\|x_1\|} \cdot r \in S$ und $Ax_0 = x_0$, und $A(-x_0) = -x_0$.

$\square$

Eine andere Sichtweise auf SO_2: $\mathbb{C}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR mit Basis $(1, i)$

$$\underset{z}{\overset{\cup}{}} z = \underbrace{a}_{=\mathrm{Re}(z)} + \underbrace{b}_{=\mathrm{Im}(z)} i = r \cdot e^{i\varphi} \qquad (r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \varphi \in [0, 2\pi))$$

$$\mu_z : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ w \longmapsto zw \end{cases} \quad \text{ist } \mathbb{R}\text{-linear}$$



$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
$$= \{e^{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$z, z' \in S^1 \Rightarrow |zz'| = |z||z'| = 1 \Rightarrow zz' \in S^1$$
$$z \in S^1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z} \Rightarrow z^{-1} \in S^1$$

Für $z = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi$

$$\mu_z(1) = z \cdot 1 = z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$$
$$\mu_z(i) = z \cdot i = r \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = r \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = r \cdot \cos(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\varphi + \tfrac{\pi}{2})$$
$$= -r \cdot \sin\varphi + i \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow A_z := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z) = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \text{für } r = 1: \quad A_z \in SO_2.$$

$$\Rightarrow f : \begin{cases} S^1 \longrightarrow SO_2 \\ e^{i\alpha} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{ist bijektiv. } \& \quad f(\underbrace{e^{i\alpha} e^{i\beta}}_{e^{i(\alpha+\beta)}}) = f(e^{i\alpha})\, f(e^{i\beta})$$

$\Rightarrow f$ ist Gruppenisomorphismus

Was ist mit SO_3?

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_3$

__Satz__ (ohne Beweis): Die Abb. $\Phi : [0, 2\pi)^3 \longrightarrow SO_3$, $(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto B_\alpha \cdot A_\beta B_\gamma$
ist surjektiv.

Ist $A = \Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ so heißen (α, β, γ) Eulersche Winkel zu A.

Ausblick: Quaternionen – $\mathbb{H} \supseteq \mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$

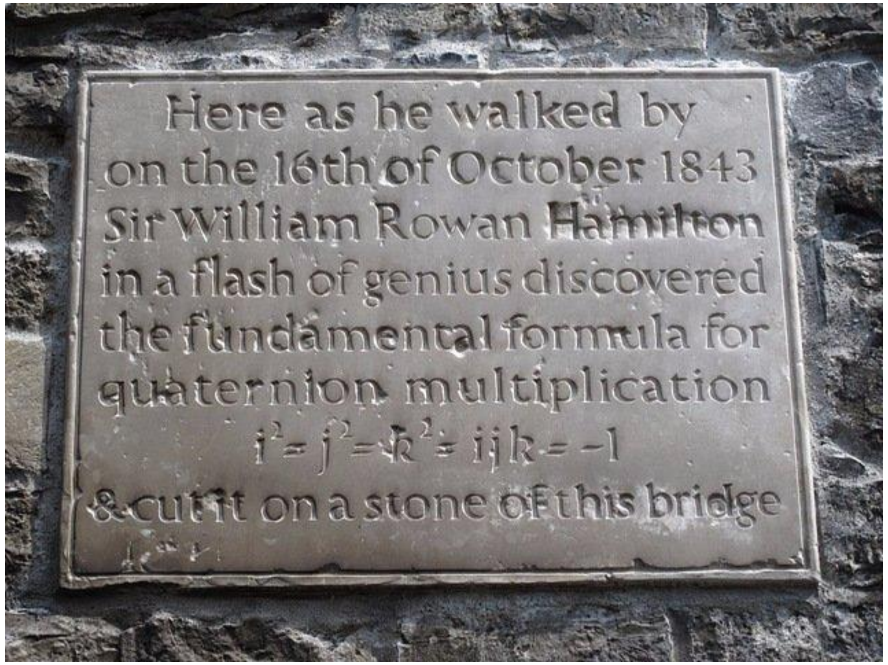
$\mathbb{H}$ ist 4-dim. $\mathbb{R}$-VR mit Basis $(1, i, j, k)$

Die Multiplikation ist erklärt durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

D.h. $(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)$

$$\begin{aligned} &= (aa' - bb' - cc' - dd') \\ &+ (ab' + ba' + cd' - dc')\,i \\ &+ (ac' - bd' + ca' + db')\,j \\ &+ (ad' + bc' - cb' + da')\,k \end{aligned}$$



$\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper (Divisionsring)

$$\|a+bi+cj+dk\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$S^3 = \{ x \in \mathbb{H} : \|x\| = 1 \}$ ... Einheitsquaternionen (3-Sphäre)

Quaternionen: $\mathbb{H}$ ist 4-dim. $\mathbb{R}$-VR mit Basis $(1, i, j, k)$ $\quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$S^3 = \{ x \in \mathbb{H} : \|x\| = 1 \}$ ... Einheitsquaternionen (3-Sphäre)

$\mathbb{H}_0 := \mathcal{L}(\{i, j, k\})$ ist ein 3-dimensionaler Unterraum.

Für jedes $z \in S^3$ ist $\quad d_z : \begin{cases} \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0 \\ x \longmapsto z x z^{-1} \end{cases}$ eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ $\quad (d_z = d_{-z})$

$\Longrightarrow$ Es gibt eine 2:1 Überlagerung $\quad S^3 \longrightarrow SO_3$,

d.h. Drehungen im $\mathbb{R}^3$ können durch Einheitsquaternionen dargestellt werden.

Das Quaternionenprodukt entspricht der Hintereinanderausführung von Drehungen.

Anwendungen: Computergrafik und -animationen, Flugsimulationen, ...

Der Dualraum (für Innere-Produkt-Räume)

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein endlich-dimensionaler K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Def: (1) Eine lineare Abbildung $\varphi: V \to K$ heißt **lineares Funktional**

(2) Der K-VR

$$V^* := L(V, K) := \{ \varphi: V \to K \ : \ \varphi \text{ ist linear} \}$$

heißt **Dualraum von V**.

Erinnerung: $\forall \varphi, \psi \in V^* \ \forall \lambda \in K \ \forall v \in V$: $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ und $(\lambda \varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$

Bsp: (1) $V = \mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong M_{1 \times n}(\mathbb{R}) = \{ (a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

Explizit: Jedes $a = (a_1, \dots, a_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ induziert eine lineare Abb.

$$\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = \cancel{(x_1, \dots, x_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto a \cdot x = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Jedes $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ ist von solcher Form.

(2) Sei $V \subseteq \mathbb{R}[X]$ der $(n+1)$-dimensionale Raum der Polynome vom Grad $\leq n$.

Dann sind
$$\begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \int_{-1}^{1} P(x)\,dx \end{cases}$$

und
$$\begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P(x)\,dx \end{cases}$$

lineare Funktionale

Satz (Darstellungssatz von Riesz) Sei V ein endlich-dim. K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Zu jedem linearen Funktional $\varphi: V \to K$ gibt es ein eindeutiges $u \in V$, so dass gilt: $\forall v \in V: \quad \varphi(v) = \langle u, v \rangle$

Beweis: Sei $\varphi: V \to K$ linear, $(b_1, \ldots, b_n)$ sei ONB von V

Existenz: Ansatz: $u := \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(b_i)}\, b_i$. Beh: $\forall v \in V: \quad \varphi(v) = \langle u, v \rangle$

Sei $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v \rangle b_i$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v \rangle b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v \rangle \varphi(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\varphi(b_i)}\, b_i, v \rangle = \langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(b_i)}\, b_i}_{=u}, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Eindeutigkeit: Seien $u_1, u_2 \in V$ $\forall v \in V: \langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$

$$\Rightarrow \forall v \in V: \langle u_1 - u_2, v \rangle = 0 \underset{v = u_1 - u_2}{\Longrightarrow} \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2.$$

$\square$

Bsp: $V \subseteq \mathbb{C}[X]$ $\mathbb{C}$-VR der Polynome vom Grad ≤ 2.

$$\langle Q, P \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{Q}(x) P(x)\, dx$$

$$\varphi : V \to K, \qquad \varphi(P) = \int_{-1}^{1} e^{-i\pi x} P(x)\, dx$$

Riesz $\Rightarrow$ $\exists!\ Q \in V$: $\forall P \in V$: $\varphi(P) = \int_{-1}^{1} \overline{Q}(x) P(x)\, dx$

Hier: Für $P = a + bX + cX^2$ ist $\varphi(P) = -\frac{4c}{\pi^2} - i\frac{2b}{\pi}$

und $Q = \frac{45}{6\pi^2} + \frac{3i}{\pi} X - \frac{45}{2\pi^2} X^2$ (Ü)

Korollar: Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $\Phi: V \to V^*$, $u \longmapsto \langle u, \cdot \rangle$ ein Isomorphismus.

Insbesondere: Ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, so ist $(\langle b_1, \cdot \rangle, \dots, \langle b_n, \cdot \rangle)$ eine Basis von V^*. Es gilt $\dim V = \dim V^*$.

Beweis: Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist Φ bijektiv.

z.z.: $\forall u, u' \in V \; \forall \lambda \in K$: $\underset{\substack{\| \\ f_{u+u'}}}{\Phi(u+u')} = \underset{\substack{\| \\ f_u}}{\Phi(u)} + \underset{\substack{\| \\ f_{u'}}}{\Phi(u')}$, $\underset{\substack{\| \\ f_{\lambda u}}}{\Phi(\lambda u)} = \lambda \underset{\substack{\| \\ \lambda f_u}}{\Phi(u)}$.

$f_u := \Phi(u)$, d.h.

$\forall v \in V$: $f_u(v) = \langle u, v \rangle = \Phi(u)(v)$

Seien $u, u' \in V$, $\lambda \in K$.

z.z.: $\forall v \in V$: $f_{u+u'}(v) = f_u(v) + f_{u'}(v)$, $f_{\lambda u}(v) = \lambda f_u(v)$

$$f_{u+u'}(v) = \langle u+u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle = f_u(v) + f_{u'}(v)$$

$$f_{\lambda u}(v) = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \lambda f_u(v)$$

$\square$

Korollar: Sei $K=\mathbb{R}$. Dann ist $\Phi: V \to V^*$, $u \mapsto \langle u, \cdot \rangle$ ein Isomorphismus.

Insbesondere: Ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, so ist $(\langle b_1, \cdot \rangle, \dots, \langle b_n, \cdot \rangle)$ eine Basis von V^*. Es gilt $\dim V = \dim V^*$.

Bem: Im Fall $K=\mathbb{C}$ ist Φ nicht linear aber semi-linear

$(\Phi(u+u') = \Phi(u) + \Phi(u'), \quad \Phi(\lambda u) = \overline{\lambda}\, \Phi(u))$

Es ist aber weiterhin $\dim V^* = \dim V$ und $(\langle b_1, \cdot \rangle, \dots, \langle b_n, \cdot \rangle)$ eine Basis von V^*.

Adjungierte Abbildungen

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Satz: Seien V, W endlich-dim. K-VR mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$.
Zu jeder linearen Abbildung $\varphi: V \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi^*: W \to V$ derart, dass

$$\forall v \in V \; \forall w \in W: \quad \langle w, \varphi(v) \rangle_W = \langle \varphi^*(w), v \rangle_V.$$

Beweis (i) Es gibt eine eindeutige derartige Abb. φ^*.

Sei $w \in W$. Sei $\psi: V \to K, \; v \mapsto \langle w, \varphi(v) \rangle_W \quad \Rightarrow \psi \in V^*$

$\xrightarrow{\text{Riesz}} \exists!\, u \in V: \; \forall v \in V: \; \psi(v) = \langle u, v \rangle_V$

d.h. $\quad \forall v \in V: \; \langle u, v \rangle_V = \langle w, \varphi(v) \rangle_W$

Definiere $\varphi^*(w) = u$

Satz: Seien V, W endlich-dim. $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukten $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot,\cdot \rangle_W$. Zu jeder linearen Abbildung $\varphi: V \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi^*: W \to V$ derart, dass

$$\forall v \in V\ \forall w \in W: \quad \langle w, \varphi(v) \rangle_W = \langle \varphi^*(w), v \rangle_V.$$

Beweis: [...] (ii) φ^* ist linear.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $w, w' \in W$, $v \in V$

zz: $\varphi^*(\lambda w + w') = \lambda \varphi^*(w) + \varphi^*(w')$

$$\langle \varphi^*(\lambda w + w'), v \rangle_V = \langle \lambda w + w', \varphi(v) \rangle_W = \bar{\lambda} \langle w, \varphi(v) \rangle_W + \langle w', \varphi(v) \rangle_W$$

$$= \bar{\lambda} \langle \varphi^*(w), v \rangle_V + \langle \varphi^*(w'), v \rangle_V = \langle \lambda \varphi^*(w) + \varphi^*(w'), v \rangle_V$$

$$\Longrightarrow \varphi^*(\lambda w + w') = \lambda \varphi^*(w) + \varphi^*(w')$$

Bem: Sind $u, u' \in V$: $\quad \forall v \in V: \langle u, v \rangle = \langle u', v \rangle \Longrightarrow u = u'$.

$\square$

Def: Seien V, W endlich-dim. K-VR mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$.
Sei $\varphi: V \to W$ linear. Die eindeutig bestimmte lineare Abb. $\varphi^*: W \to V$
mit der Eigenschaft

$$\forall v \in V\ \forall w \in W: \quad \langle w, \varphi(v) \rangle_W = \langle \varphi^*(w), v \rangle_V.$$

heißt adjungierte Abbildung (zu φ).

Satz: Seien V W endlich-dim. K-VR mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$.

(1) Für $\mathrm{id}: V \to V$ ist $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$

(2) Für $\varphi, \psi: V \to W$ gilt $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.

(3) Für $\lambda \in K$, $\varphi: V \to W$ gilt $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$

(4) Für $\varphi: V \to W$ ist $(\varphi^*)^* = \varphi$

(5) Für $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ ist $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Beweis: Exemplarisch (2):

Seien $v \in V$, $w \in W$.

$$\langle (\varphi+\psi)^*(w), v \rangle_V = \langle w, (\varphi+\psi)(v) \rangle_W = \langle w, \varphi(v) + \psi(v) \rangle_W = \langle w, \varphi(v) \rangle_W + \langle w, \psi(v) \rangle_W$$

$$= \langle \varphi^*(w), v \rangle_V + \langle \psi^*(w), v \rangle_V = \langle \varphi^*(w) + \psi^*(w), v \rangle_V$$

$$\Rightarrow (\varphi+\psi)^*(w) = \varphi^*(w) + \psi^*(w) \longrightarrow (\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

(Rest ohne Beweis.) $\square$

Satz: Seien V, W endlich-dim K-VR. mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$. Seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ ONB von V bzw W. Für jede lineare Abb. $\varphi: V \to W$ gilt:

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\varphi)^*.$$

Insbesondere: Ist $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus, so ist $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\varphi^*) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\varphi)^*$.

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\varphi) = (\lambda_{i,j}) \in M_{n\times m}(K)$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$ ist Koordinatenvektor von $\varphi(a_j)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow \lambda_{i,j} = \langle b_i, \varphi(a_j)\rangle_W$

$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi^*) = (\mu_{i,j}) \in M_{m\times n}(K)$ $\quad \begin{pmatrix} \mu_{1,j} \\ \vdots \\ \mu_{m,j} \end{pmatrix}$ ist Koordinatenvektor von $\varphi^*(b_j)$ bzgl. $\mathcal{A}$.

$\Rightarrow \mu_{i,j} = \langle a_i, \varphi^*(b_j)\rangle_V = \langle \varphi(a_i), b_j\rangle_W = \overline{\langle b_j, \varphi(a_i)\rangle_W} = \overline{\lambda_{j,i}}$

$\Rightarrow M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\varphi)^*.$ $\square$

Satz: Seien V, W endlich-dim K-VR. mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$.
Für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ gilt:

(1) $\operatorname{Im} \varphi^* = (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$

(2) $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

Beweis: (1) Zeige: $(\operatorname{Im} \varphi^*)^\perp = \operatorname{Ker} \varphi$

Sei $v \in V$. $\varphi(v) = 0 \iff \forall w \in W: \langle \varphi(v), w\rangle_W = 0 \iff \forall w \in W: \langle v, \varphi^*(w)\rangle_V = 0 \iff v \in (\operatorname{Im} \varphi^*)^\perp$.

(2) Sei $w \in W$.

$w \in (\operatorname{Im} \varphi)^\perp \iff \forall v \in V: \langle w, \varphi(v)\rangle = 0 \iff \forall v \in V: \langle \varphi^*(w), v\rangle = 0 \iff \varphi^*(w) = 0$

$\iff w \in \operatorname{Ker} \varphi^*$.

Satz: Seien V, W endlich-dim K-VR. mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$.
Für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ gilt:

(1) $\operatorname{Im} \varphi^* = (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$

(2) $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

Korollar: Für eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ gilt:

$\operatorname{Im}(A^*) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ und $\operatorname{Ker}(A^*) = (\operatorname{Im} A)^\perp$.