Orthogonale/unitäre Endomorphismen und Matrizen

Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$ unitär $(A^* = A^{-1})$.

$$|\det A|^2 = \det A \cdot \overline{\det A} = \det A \cdot \det \bar{A} = \det A \cdot \det(\underbrace{\bar{A}^T}_{=A^*}) = \det(AA^*) = \det(E) = 1$$

$$\Rightarrow |\det A| = 1$$

Für eine orthogonale Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ gilt entsprechend $\det A \in \{\pm 1\}$.

Prop & Def: Die folgenden Mengen sind jeweils Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$ bzw $GL_n(\mathbb{C})$:

$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$, die orthogonale Gruppe,

$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^{-1} = A^*\}$, die unitäre Gruppe,

$SO_n := \{A \in O_n : \det(A) = 1\}$, die spezielle orthogonale Gruppe.

Prop & Def: Die folgenden Mengen sind jeweils Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$ bzw $GL_n(\mathbb{C})$:

$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$, die orthogonale Gruppe,

$U_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^{-1} = A^*\}$, die unitäre Gruppe,

$SO_n := \{A \in O_n : \det(A) = 1\}$, die spezielle orthogonale Gruppe,

Beweis: U_n ist Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$: $E \in U_n$

$A, B \in U_n \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^* A^* = (AB)^* \Rightarrow AB \in U_n$

Sei $A \in U_n$. $A^{-1}A = E \Rightarrow A^* \underbrace{(A^{-1})^*} = E \Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

$\underline{(A^{-1})^{-1}} = A = (A^*)^{-1} = \underline{(A^{-1})^*} \Rightarrow A^{-1} \in U_n$

O_n ist UGR. von $GL_n(\mathbb{R})$: analog

SO_n ist UGR von O_n: $E \in SO_n$

$A, B \in SO_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow AB \in SO_n$

$A \in SO_n \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in SO_n.$

$\square$

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Lemma Für $A \in M_{n\times n}(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist orthogonal bzw. unitär

(b) Die Spalten von A sind eine ONB von K^n

(c) Die Zeilen von A sind eine ONB von K^n

Beweis: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\quad A = (a_1, \dots, a_n)$, $\quad a_i \in K^n$

A unitär $\Leftrightarrow A^* A = E \Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}: \underbrace{a_i^* a_j}_{= \langle a_i, a_j \rangle} = \delta_{i,j} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n)$ ist ONB des K^n.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) analog mit $AA^* = E \Leftrightarrow \bar{A} \cdot A^T = E \Leftrightarrow [\dots] \Leftrightarrow$ Die Zeilen von A bilden eine ONB K^n.

Satz: Sei V ein endlich-dim. K-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ONB $\mathcal{B}$.
Ist $\varphi: V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt

$$\varphi \text{ ist orthogonal [unitär]} \Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ ist orthogonal [unitär].}$$

Beweis: Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\Phi_{\mathcal{B}}: K^n \to V$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

Beh: $\forall v,w \in V: \langle v,w\rangle = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^* \, \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$

Seien $v,w \in V$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$

$$\langle v,w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{x_i}\, y_j \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i = x^* y$$

$$\langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\varphi(v))^* \, \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\varphi(w)) = (Ax)^*(Ay) = x^* A^* A y \qquad A := M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

φ unitär $\Leftrightarrow \forall v,w \in V: \langle v,w\rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle \Leftrightarrow \forall x,y \in K^n: x^* y = x^* A^* A y$

"$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$": $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}: \delta_{i,j} = e_i^* e_j = e_i^* A^* A e_j = (A^* A)_{i,j} \Rightarrow A^* A = E \Rightarrow A$ unitär.

$\square$

Diagonalisierbarkeit

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Lemma: Sei V ein K-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und sei $\varphi: V \to V$ ein orthogonaler [unitärer] Endomorphismus.

(1) Ist $\lambda \in K$ EW von φ, so ist $|\lambda| = 1$.

(2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: (1) ✓

(2) Seien v, w EV zu den EW λ, μ.

ZZ: $\langle v, w \rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

$$\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \bar{\lambda} \mu \langle v, w \rangle$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}\mu = 1 \xRightarrow[\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda^{-1}]{|\lambda| = 1} \lambda^{-1}\mu = 1 \Rightarrow \lambda = \mu.$$

$\square$

Satz: Sei V ein ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Ist $\varphi: V \to V$ ein unitärer Endomorphismus, so gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von φ.

Insbesondere ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ und } |\lambda_i| = 1 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}$$

Korollar: Ist $A \in U_n$, so gibt es $S \in U_n$ so, dass

$$S^* A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ und } |\lambda_i| = 1 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

(Beachte: $S^* = S^{-1}$.)

Satz: Sei V ein ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Ist $\varphi: V \to V$ ein unitärer Endomorphismus, so gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von φ.

Insbesondere ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $|\lambda_i| = 1$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

Beweis: Induktion nach $n = \dim V$. $\underline{n=0}$ ✓ $\underline{n \geq 1,\ n-1 \to n}$:
$\mathbb{C}$ alg. abg. $\Rightarrow$ P_φ zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow$ φ hat (zumindest) einen EW $\lambda_1 \neq 0$.
Sei $0 \neq v_1$ EV zu λ_1

$W := \langle v_1 \rangle^\perp = \{ w \in V : \langle w, v_1 \rangle = 0 \}$ $\qquad V = \langle v_1 \rangle \oplus W$ mit $\langle v \rangle \perp W$.

Beh: W ist φ-invariant, d.h. $\varphi(W) \subseteq W$.

[denn: $\forall w \in W$: $\langle \varphi(w), v_1 \rangle = \lambda_1^{-1} \langle \varphi(w), \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1^{-1} \langle \varphi(w), \varphi(v_1) \rangle = \lambda_1^{-1} \langle w, v_1 \rangle = 0$.]

$\Rightarrow \varphi|_W : W \to W$ ist ein unitärer Endomorphismus.

$\dim W = n-1 \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \exists$ ONB $(v_2, \dots, v_n)$ von W bestehend aus EV von $\varphi|_W$.

$\forall i \in \{2, \dots, n\}$: $v_1 \perp v_i \Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist eine ONB von V bestehend aus EV von φ. $\square$

O_n für $n \in \{1,2\}$.

- $O_1 = \{\pm 1\}$

<u>Lemma:</u> Sei $A \in O_2$. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Der erste Fall tritt ein, wenn $A \in SO_2$, d.h. $\det A = 1$, der zweite, wenn $A \notin SO_2$, d.h. $\det A = -1$.

Lemma: Sei $A \in O_2$. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, so dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Der erste Fall tritt ein, wenn $A \in SO_2$, d.h. $\det A = 1$,
der zweite, wenn $A \notin SO_2$, d.h. $\det A = -1$.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2$ $\quad v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

A orthogonal $\Rightarrow$ (v, w) ist ONB von $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $v \perp w$, $\|v\| = \|w\| = 1$

$\|v\|^2 = a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi)$: $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$

$\dim \mathcal{L}(\{v\})^\perp = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(\{v\})^\perp = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right\}\right)$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $w = \lambda \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ $\qquad 1 = \|w\| = |\lambda| \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right\|}_{=1} = |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$

Fall 1: $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda = -1$ $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$\square$

Lemma Sei V ein endlich-dim $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei φ ein orthogonaler Endomorphismus mit charakteristischem Polynom P_φ. Ist $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ eine Nullstelle von P_φ, so gibt es einen 2-dimensionalen φ-invarianten Unterraum $W \subseteq V$ derart, dass

$$P_{\varphi|_W} = (X-\lambda)(X-\bar\lambda).$$

Beweis: Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ONB von V, und $\Phi_\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to V$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ \Phi_\mathcal{B}\downarrow & & \downarrow\Phi_\mathcal{B} \\ V & \xrightarrow[\varphi]{} & V \end{array} \qquad A := M^\mathcal{B}_\mathcal{B}(\varphi) \in O_n$$

Betrachte $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto Az$

$$\Rightarrow \exists\, 0 \neq z \in \mathbb{C}^n : \quad Az = \lambda z$$

$\bar\lambda$ ist EW von A mit EV $\bar z$

[denn: $\quad A\bar z = \bar A \bar z = \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \bar\lambda \bar z$.]

Beweis: [...] $\quad \mathcal{B}$ ONB, $\quad \Phi_{\mathcal{B}}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$, $\quad A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & V \end{tikzcd}$$

$0 \neq z \in \mathbb{C}^n$: $\quad Az = \lambda z, \quad A\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}.$

$$x := \mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z+\bar{z}) \in \mathbb{R}^n, \qquad y := \mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}(z-\bar{z}) \in \mathbb{R}^n$$

Beh: $W' := \mathcal{L}(\{x,y\}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist A-invariant

[Bew: Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$Ax = \tfrac{1}{2}(Az + A\bar{z}) = \tfrac{1}{2}(\lambda z + \bar{\lambda}\bar{z}) = \tfrac{1}{2}(\lambda z + \overline{\lambda z}) = \mathrm{Re}(\lambda z) = \alpha x - \beta y \in \mathcal{L}(\{x,y\}) = W'$$

$$Ay = \tfrac{1}{2i}(Az - A\bar{z}) = \tfrac{1}{2i}(\lambda z - \overline{\lambda z}) = \mathrm{Im}(\lambda z) = \alpha y + \beta x \in W'$$

$\Rightarrow AW' \subseteq W'$]

$z, \bar{z}$ lin. unabh. $/\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ x, y lin. unabh. $/\mathbb{R}$ $\quad$ [Ü]

$\Rightarrow \dim W' = 2.$

$W := \Phi_{\mathcal{B}}(W')$ ein 2-dim UR von V & φ-invariant

$$P_{\varphi|W} = \det\begin{pmatrix} \alpha - X & \beta \\ -\beta & \alpha - X \end{pmatrix} = (\alpha - X)^2 + \beta^2 = X^2 - \underbrace{2\alpha}_{=\lambda+\bar{\lambda}} X + \underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{=\lambda\bar{\lambda}} = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda}).$$

$\square$

Satz: Sei V ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Ist $\varphi: V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus, so gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V derart, dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & \boxed{A_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

wobei $A_1, \dots, A_k \in SO_2$ und $A_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$ mit $\alpha_i \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$.

Satz:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A_1} & \\ 0 & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

wobei $A_1, \dots, A_k \in SO_2$

und $A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ mit $\alpha_i \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$

Beweis: $P_\varphi \in \mathbb{R}[X]$

$$P_\varphi = \pm (X-\mu_1) \cdots (X-\mu_m)(X-\lambda_1)(X-\overline{\lambda_1}) \cdots (X-\lambda_k)(X-\overline{\lambda_k})$$

mit $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

φ orthogonal $\Rightarrow$ $\mu_i \in \{\pm 1\}$ und $|\lambda_i| = 1$.

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

wobei V_i, W_j φ-invariante UR von V sind, $\dim V_i = 1$, $\dim W_i = 2$. (Lemma)

$\square$

Satz: Zu jeder Matrix $A \in SO_3$ gibt es eine Matrix $S \in SO_3$ und einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ derart, dass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Beweis: $P_A \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P_A = 3 \Rightarrow P_A$ hat (zumindest) eine reelle NSt. μ_1

$\mu_1 \in \{\pm 1\}$.

Sei v_1 normierter EV zu μ_1. Ergänze zu ONB $(v_1, v_2, v_3) =: \mathcal{B}$. OE: $\mathcal{B}$ ist positiv orient.

$C := T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \in SO_3$ $\qquad C^T A C = \left(\begin{array}{c|cc} \mu_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_1}} \\ 0 & & \end{array}\right)$

Fall 1: $\mu_1 = 1$: $\det A_1 = 1 \Rightarrow A_1 \in SO_2$. ✓

Fall 2: $\mu_1 = -1$: $\det A_1 = -1 \Rightarrow A_1 \in O_2 \setminus SO_2 \Rightarrow A_1$ diagonalisierbar mit EW $+1, -1$.

O.E.: $C^T A C = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Mit $\mathcal{B}' = (v_2, v_3, v_1)$ $\quad S := T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}$

$$\Rightarrow S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$