

Beispiel: Polynomfunktion (vom Grad ≤ 5) mit kleinstmöglichem Abstand zur Funktion $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$

Gesucht: $c_0, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$, so dass für $P(x) = c_5 x^5 + \dots + c_1 x + c_0$

$$\begin{aligned} \|\sin(x) - P(x)\|^2 &= \langle \sin(x) - P(x), \sin(x) - P(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x) - P(x))^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x) - c_0 - c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3 - c_4 x^4 - c_5 x^5)^2 dx \quad \text{minimal ist} \end{aligned}$$

$$V = C_{\mathbb{R}}([- \pi, \pi])$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

$$U = \mathcal{L}(\{1, x, \dots, x^5\})$$

1. Finde ONB $(b_1, \dots, b_6)$ von U

2. Berechne $p_U(\sin|_{[-\pi, \pi]}) = \sum_{i=1}^6 \underbrace{\langle b_i, \sin \rangle}_{= \int_{-\pi}^{\pi} b_i(x) \sin(x) dx} b_i$

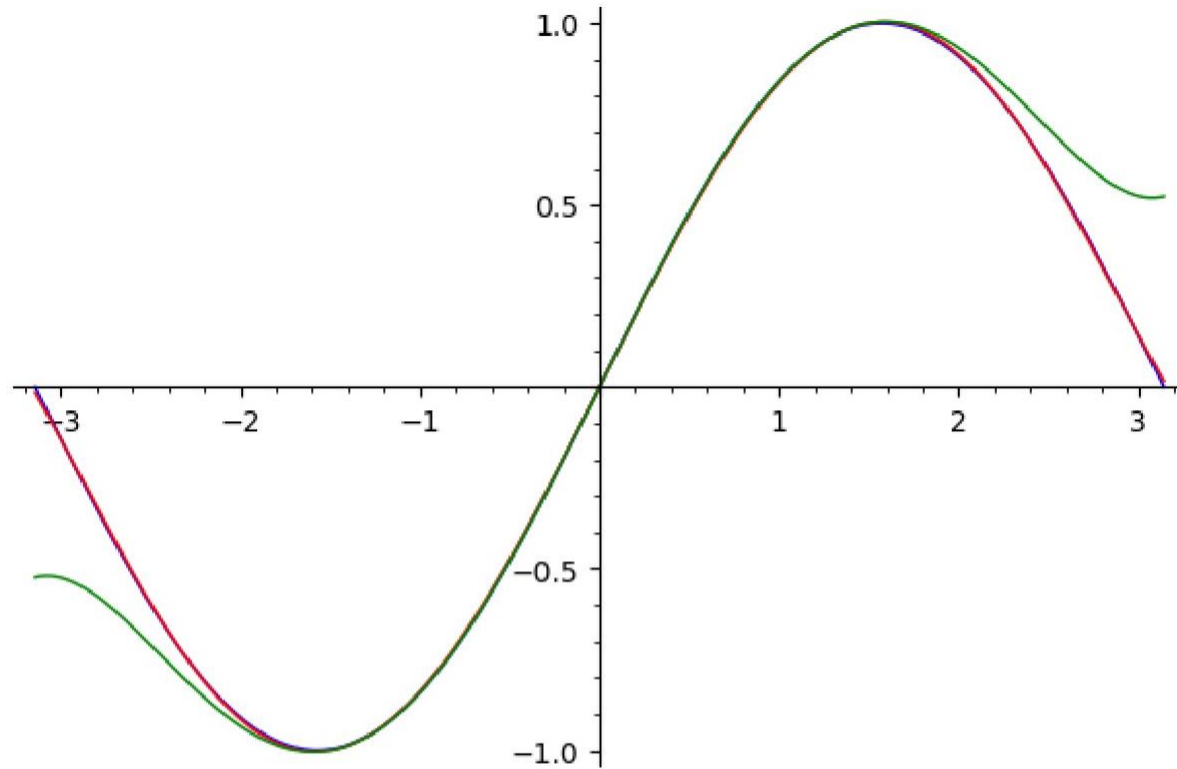
$$\underline{1.} \quad \int_{-1}^1 P_m(y) P_n(y) dy = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (\text{Legendre-Polynome})$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} P_m\left(\frac{x}{\pi}\right) P_n\left(\frac{x}{\pi}\right) \frac{dx}{\pi} = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$\|P_m\|^2 = \pi \frac{2}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}} P_n\left(\frac{x}{\pi}\right) : n \in \{1, \dots, 6\} \right\} \text{ ist ONB von } U$$

[...] $\Rightarrow$

$$P(t) = 0.00564311797634688 \cdot t^5 - 0.155271410633429 \cdot t^3 + 0.987862135574676 \cdot t$$



$$Q(x) = \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{6} x^3 + x$$

Def: Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Die **adjungierte Matrix** zur Matrix A ist die Matrix $A^* := \overline{A}^T = \overline{A^T} \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$.

D.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

A^* heißt auch **transponiert-konjugierte** oder **hermitesch-transponierte** Matrix

Lemma Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

(1) Für $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ gilt $A^* = A^T$

(2) Für $A, B \in M_{m \times n}(K)$ und $\lambda \in K$ gilt $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(3) Für $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times k}(K)$: $(AB)^* = B^* A^*$

(4) Für $A \in GL_n(K)$ gilt $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Beweis: Folgt unmittelbar aus den entsprechenden Regeln für transponierte Matrizen (W4 S.13) und $\overline{\overline{A}^T} = A^T$.

Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def: Sei V ein endlich-dim. K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ein Endomorphismus $\varphi: V \rightarrow V$ heißt **orthogonal** ($K=\mathbb{R}$) bzw. **unitär** ($K=\mathbb{C}$), wenn

$$\forall v, w \in V: \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Lemma: Sei $\varphi: V \rightarrow V$ ein orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus. Dann gilt

(1) $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

(2) $v \perp w \iff \varphi(v) \perp \varphi(w)$ für $v, w \in V$.

(3) φ ist ein Isomorphismus und φ^{-1} ist orthogonal bzw. unitär.

(4) Ist λ EW von φ , so ist $|\lambda| = 1$

Beweis (1), (2) ✓ (3) nach (1) ist φ injektiv, da V endlich-dim $\Rightarrow \varphi$ bijektiv.

(4) Sei λ ein EW von φ , und v ein zugehöriger EV.

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \xrightarrow{\|v\| \neq 0} |\lambda| = 1.$$

□

Lemma: Sei $\varphi: V \rightarrow V$ ein orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus. Dann gilt

(1) $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

(2) $v \perp w \iff \varphi(v) \perp \varphi(w)$ für $v, w \in V$.

(3) φ ist ein Isomorphismus und φ^{-1} ist orthogonal bzw. unitär.

(4) Ist λ EW von φ , so ist $|\lambda| = 1$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Bem: Ein orthogonaler [unitärer] Endomorphismus ist eine **Isometrie**.

- Ist $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ für $v \in V$, so ist φ orthogonal [unitär].

(Denn man kann über die Polarisationsformel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch $\|\cdot\|$ ausdrücken.)

- Ein Endomorphismus der Winkel erhält muss aber nicht unbedingt orthogonal [unitär] sein. Ist $\varphi: V \rightarrow V$ orthogonal, so erhält für $\lambda \neq 0, 1$ auch $\lambda\varphi$ Winkel, nicht Längen!

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf K^n , $A: K^n \rightarrow K^n$.

Für $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in K^n$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \mu_i = v^* w$$

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^* Aw = v^* A^* Aw$$

$$\langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i^* A^* Ae_j = e_i^T A^* A e_j = (A^* A)_{i,j}$$

$$A \text{ unitär [orthogonal]} \rightarrow \delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = (A^* A)_{i,j} \Rightarrow \boxed{A^* A = E}$$

$$A^* A = E \Rightarrow \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Def: • Eine Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, falls $A^{-1} = A^T$.
• —, — $A \in GL_n(\mathbb{C})$ heißt **unitär**, falls $A^{-1} = A^*$.

Bem: • Für $A \in GL_n(\mathbb{R})$: A unitär $\Leftrightarrow A$ orthogonal
• $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist unitär $\Leftrightarrow A^* A = E \Leftrightarrow A A^* = E$
[$A^* A = E \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C})$.
 $\downarrow$
 $A A^* A = A \Rightarrow A A^* \underbrace{A A^{-1}}_{=E} = \underbrace{A A^{-1}}_{=E} \Rightarrow A A^* = E.]$
• $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = E \Leftrightarrow A A^T = E$.

Bsp: Die Drehmatrizen $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$
und Spiegelungsmatrizen $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ sind orthogonal.
 $\det(D_\alpha) = 1$ $\det(S_\alpha) = -1$