

Orthogonales Komplement & Orthogonale Projektion

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Def: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und $A \subseteq V$ eine Teilmenge.

Das **orthogonale Komplement** von A (in V) ist die Menge

$$A^\perp := \{v \in V : \forall a \in A: \langle a, v \rangle = 0\}.$$

Prop: $A^\perp$ ist ein Unterraum von V

Beweis: $\forall v \in V: \langle v, 0 \rangle = 0 \Rightarrow 0 \in A^\perp$

zz: $\forall v, w \in A^\perp, \lambda \in K: \lambda v + w \in A^\perp$

Sei $a \in A$

$$\langle a, \lambda v + w \rangle = \lambda \underbrace{\langle a, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle a, w \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda v + w \in A^\perp$$

□

Satz: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und U ein Unterraum mit $\dim U = m < \infty$. Dann ist

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Insbesondere:

- Ist $\dim V = n < \infty$, $\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$.
- Jedes $v \in V$ besitzt eine Darstellung $v = u' + u''$ mit $u' \in U, u'' \in U^\perp$.
Dabei sind u', u'' eindeutig durch v bestimmt.

Beweis: Sei $(b_1, \dots, b_m)$ eine ONB von U .

zz: (i) $V = U + U^\perp$ (ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$

(i) Sei $v \in V$. $u' := \sum_{i=1}^m \langle b_i, v \rangle b_i \in U$ $u'' := v - u'$

zz: $u'' \in U^\perp$. Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ orthogonale (senkrechte) Projektion von v auf U .

$$\begin{aligned} \langle b_j, u'' \rangle &= \langle b_j, v - u' \rangle = \langle b_j, v \rangle - \langle b_j, u' \rangle = \langle b_j, v \rangle - \left\langle b_j, \sum_{i=1}^m \langle b_i, v \rangle b_i \right\rangle \\ &= \langle b_j, v \rangle - \sum_{i=1}^m \langle b_i, v \rangle \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle b_j, v \rangle - \langle b_j, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

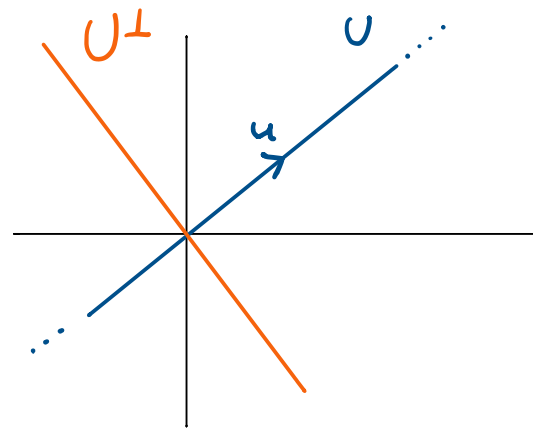
(ii) „ $\supset$ “ „ $\subset$ “ Sei $u \in U \cap U^\perp$. $\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$
 $\Rightarrow u \perp u \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0.$

□

Bsp: (1) $0 \neq u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$U = \mathcal{L}(\{u\}) = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^\perp = \mathcal{L}(\left\{ \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \right\})$$



(2)(i) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $U = \mathcal{L}(\{u, v\})$

$$\Rightarrow \dim U^\perp = 3 - \dim U = 1.$$

Für $u \times v$ gilt $u \times v \perp u$ und $u \times v \perp v$

$$\Rightarrow u \times v \in U^\perp \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow U^\perp = \mathcal{L}(\{u \times v\})$$

(ii) Ist $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $W = \mathcal{L}(\{w\})$, so ist $\dim W^\perp = 2$, also $W^\perp$ der 2-dim UR (=Ebene die den Ursprung enthält), der orthogonal zu w ist

(i)+(iii): $(U^\perp)^\perp = U$!

Lemma: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\dim V = n < \infty$.

Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis: $\dim((U^\perp)^\perp) = n - \dim(U^\perp) = n - (n - \dim U) = \dim U$.

Genügt z.z.: $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

D.h. z.z.: $\forall u \in U \quad \forall v \in U^\perp: \langle u, v \rangle = 0 \quad \checkmark$

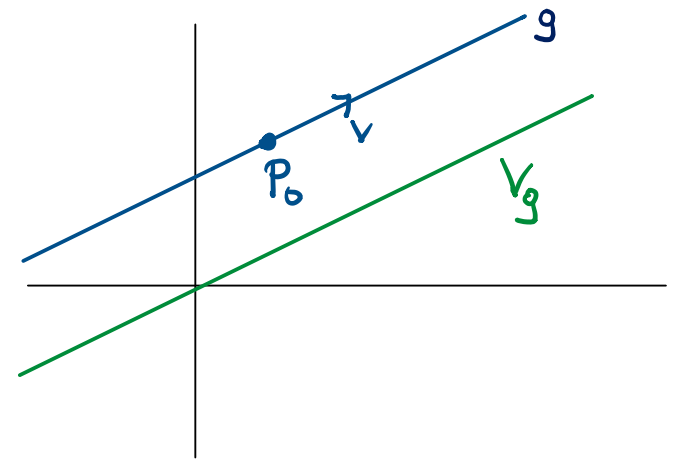
□

Bsp: $\{0\}^\perp = V, \quad V^\perp = \{0\}$.

Bsp: $\cdot) g = \{P \in \mathbb{R}^2: \vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (v \neq 0)$

$V_g = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein 1-dim UR des $\mathbb{R}^2$

$$g = \{P \in \mathbb{R}^2: \vec{P_0P} \in V_g\} = P_0 + V_g$$



$V_g = \{\vec{PQ} : P, Q \in g\}$ ist durch g eindeutig bestimmt, aber die Wahl von P_0 ist nicht eindeutig!

Ein **Normalenvektor** von g ist ein von Null verschiedener Vektor $n \in V_g^\perp$

(Achtung! Ist $P_0 \neq 0$, so ist $g^\perp = \{0\}$!)

$\cdot)$ Ebene im $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$): Sei $P_0 \in \mathbb{R}^n$, $V_E \subseteq \mathbb{R}^n$ ein 2-dimensionaler UR mit Basis (u, v)

$$\begin{aligned} E &= \{P \in \mathbb{R}^n: \vec{P_0P} \in V_E\} = P_0 + V_E \\ &= \{P \in \mathbb{R}^n, \vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Anwendung: Hessesche Normalform einer Geraden / Ebene / Hyperebene

Eine Teilmenge $H \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Hyperebene**, wenn es $P_0 \in \mathbb{R}^d$ und einen $(d-1)$ -dimensionalen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass gilt

$$H = \{P \in \mathbb{R}^d : \overrightarrow{P_0 P} \in V\} = P_0 + V = \{P \in \mathbb{R}^d : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}\}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$

(hier ist $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine Basis von V .)

Der VR V ist eindeutig durch H bestimmt, $P_0 \in H$ ist beliebig.

Beh: Ist $n \in V^\perp \setminus \{0\}$, so ist $H = \{P \in \mathbb{R}^d : \langle n, \overrightarrow{OP} \rangle = \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle\}$

Explizit: Ist $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix}$ und $c = \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle$, so ist

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d : n_1 x_1 + \dots + n_d x_d = c \right\}.$$

Dabei sind n und c bis auf ein Vielfaches eindeutig bestimmt.

Beh: Ist $n \in V^\perp \setminus \{0\}$, so ist $H = \{P \in \mathbb{R}^d : \langle n, \overrightarrow{OP} \rangle = \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle\}$

Explizit: Ist $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix}$ und $c = \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle$, so ist

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d : n_1 x_1 + \dots + n_d x_d = c \right\}.$$

Dabei sind n und c bis auf ein Vielfaches eindeutig bestimmt.

Beweis: $H = \{P \in \mathbb{R}^d : \overrightarrow{P_0 P} \in V\}$

$$\begin{aligned} P \in H &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \in V = (V^\perp)^\perp = (\mathcal{L}(\{n\}))^\perp \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \perp n \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{P_0 P}, n \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}, n \rangle = \langle \overrightarrow{OP}, n \rangle - \langle \overrightarrow{OP_0}, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{OP}, n \rangle = \langle \overrightarrow{OP_0}, n \rangle. \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Sei $n' \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $P'_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $H = \{P \in \mathbb{R}^d : \langle n', \overrightarrow{OP} \rangle = \langle n', \overrightarrow{OP'_0} \rangle\}$.

$$\Rightarrow \forall P \in H: 0 = \langle n', \overrightarrow{OP} \rangle - \langle n', \overrightarrow{OP_0} \rangle = \dots = \langle n', \overrightarrow{P_0 P} \rangle \Rightarrow \forall v \in V: \langle n', v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow n' \in V^\perp = \mathcal{L}(\{n\}) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: n' = \lambda n$$

$$\langle n', \overrightarrow{OP'_0} \rangle = \langle \lambda n, \overrightarrow{OP'_0} \rangle = \lambda \langle n, \overrightarrow{OP'_0} \rangle \underset{P'_0 \in H}{=} \lambda \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle$$

□

Abstand eines Punktes zu einer Hyperebene

Sei $H = \{P \in \mathbb{R}^d : \overrightarrow{P_0 P} \in V\}$ eine Hyperebene ($\dim V = d-1, P_0 \in H$) und $n \in V^\perp \setminus \{0\}$ mit $\|n\|=1$. $\Rightarrow H = \{P \in \mathbb{R}^d : \langle n, \overrightarrow{OP} \rangle - c = 0\}$ mit $c = \langle n, \overrightarrow{OP_0} \rangle \in \mathbb{R}$.

Satz: Ist $Q \in \mathbb{R}^d$, so ist der Abstand von Q zu H (d.h. $\inf\{\|\overrightarrow{PQ}\| : P \in H\}$) gegeben durch $|\langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle - c|$

Beweis: Sei $\overrightarrow{P_0 Q} = v + \alpha n$ mit $v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. $\rightarrow \alpha = \langle \overrightarrow{P_0 Q}, n \rangle$

Sei $P \in \mathbb{R}^d$ mit $\overrightarrow{P_0 P} = \overrightarrow{P_0 Q} - \alpha n = v$.

(1) $P \in H$ (2) $\|\overrightarrow{PQ}\| = |\langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle - c|$ (3) $\forall P' \in H : \|\overrightarrow{P'Q}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$

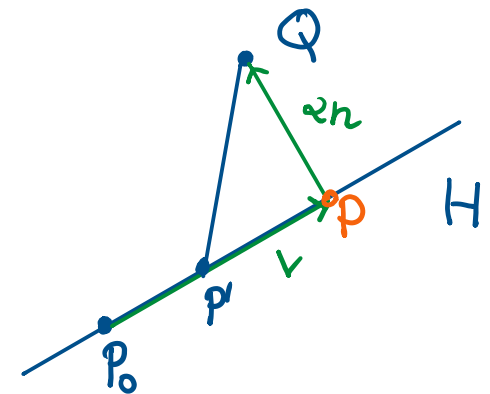
(1) $\overrightarrow{P_0 P} = \overrightarrow{P_0 Q} - \alpha n = v \in V \Rightarrow P \in H$

(2) $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \alpha n, \alpha n \rangle = \alpha^2 \underbrace{\|n\|^2}_{=1} = \langle \overrightarrow{P_0 Q}, n \rangle^2 = \left(\langle \overrightarrow{OQ}, n \rangle - \underbrace{\langle \overrightarrow{OP_0}, n \rangle}_{=c} \right)^2$

(3) $\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ}$

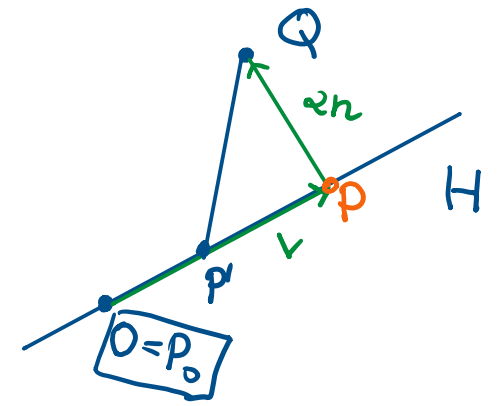
$\Rightarrow \|\overrightarrow{P'Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ}\|^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{P'P}\|^2}_{\geq 0} + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2$

□



Die orthogonale Projektion

Satz: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim U = m < \infty$. Dann ist $V = U \oplus U^\perp$.



(1) Es gibt eindeutig definierte lineare Abbildungen $p_U: V \rightarrow U$, $p_{U^\perp}: V \rightarrow U^\perp$ mit der Eigenschaft

$$\forall v \in V: v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$$

Die Abb. p_U heißt **orthogonale Projektion** auf U

(2) Ist $(b_1, \dots, b_m)$ eine ONB von U , so ist $p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle b_i, v \rangle b_i$ und $p_{U^\perp}(v) = v - p_U(v)$

(3) $\forall u \in U: p_U(u) = u$, $p_{U^\perp}(u) = 0$

$$\forall w \in U^\perp: p_U(w) = 0, p_{U^\perp}(w) = w.$$

(4) $p_U(V) = U$, $\text{Ker}(p_U) = U^\perp$ und $p_{U^\perp}(V) = U^\perp$, $\text{Ker}(p_{U^\perp}) = U$.

(5) $p_U, p_{U^\perp}$ sind idempotent, d.h. $p_U \circ p_U = p_U$, $p_{U^\perp} \circ p_{U^\perp} = p_{U^\perp} \in \text{End}(V)$

— " — orthogonal, d.h. $p_U \circ p_{U^\perp} = 0 = p_{U^\perp} \circ p_U$

und $\text{id}_V = p_U + p_{U^\perp}$.

(6) $\forall v \in V: \|p_U(v)\| \leq \|v\|$.

Satz: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim U = m < \infty$. Dann ist $V = U \oplus U^\perp$.

(1) Es gibt eindeutig definierte lineare Abbildungen $p_U: V \rightarrow U$,
 $p_{U^\perp}: V \rightarrow U^\perp$ mit der Eigenschaft
 $\forall v \in V: v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$

Beweis: $\forall v \in V \exists! u' \in U \exists! u'' \in U^\perp: v = u' + u''$
 $\Rightarrow p_U(v) = u', p_{U^\perp}(v) = u''$

Linearität: $\tilde{v} = \tilde{u}' + \tilde{u}''$ mit $\tilde{u}' \in U, \tilde{u}'' \in U^\perp$

$$p_U(2v + \tilde{v}) = p_U\left(\underbrace{(2u' + \tilde{u}')}_{\in U} + \underbrace{(2u'' + \tilde{u}'')}_{\in U^\perp}\right) = 2u' + \tilde{u}' = 2p_U(v) + p_U(\tilde{v}).$$

$p_{U^\perp}$ analog.

(2) Ist $(b_1, \dots, b_m)$ eine ONB von U , so ist $p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle b_i, v \rangle b_i$ und $p_{U^\perp}(v) = v - p_U(v)$

Beweis: siehe Beweis v. $V = U \oplus U^\perp$.

Satz: [...]

(1) Es gibt eindeutig definierte lineare Abbildungen $p_U: V \rightarrow U$,
 $p_{U^\perp}: V \rightarrow U^\perp$ mit der Eigenschaft
 $\forall v \in V: v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$

(3) $\forall u \in U: p_U(u) = u, p_{U^\perp}(u) = 0$
 $\forall w \in U^\perp: p_U(w) = 0, p_{U^\perp}(w) = w.$

$$U \ni u = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in U^\perp} \Rightarrow p_U(u) = u, p_{U^\perp}(u) = 0$$

$$U^\perp \ni w = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in U^\perp} \Rightarrow p_U(w) = 0, p_{U^\perp}(w) = w.$$

(4) $p_U(V) = U$, $\text{Ker}(p_U) = U^\perp$ und $p_{U^\perp}(V) = U^\perp$, $\text{Ker}(p_{U^\perp}) = U$.

Für $p_U: p_U(V) = U$. Sei $u \in U \Rightarrow u = p_U(u) \in p_U(V) \Rightarrow p_U(V) = U$.

$$v = \underbrace{u'}_{\in U} + \underbrace{u''}_{\in U^\perp} \in \text{Ker}(p_U) \Leftrightarrow u' = 0 \Leftrightarrow v = u'' \Leftrightarrow v \in U^\perp.$$

Satz: [...]

$$(3) \quad \forall u \in U: \quad p_U(u) = u, \quad p_{U^\perp}(u) = 0$$

$$\forall w \in U^\perp: \quad p_U(w) = 0, \quad p_{U^\perp}(w) = w.$$

$$(4) \quad p_U(V) = U, \quad \text{Ker}(p_U) = U^\perp \quad \text{und} \quad p_{U^\perp}(V) = U^\perp, \quad \text{Ker}(p_{U^\perp}) = U.$$

$$(5) \quad p_U, p_{U^\perp} \text{ sind idempotent, d.h. } p_U \circ p_U = p_U, \quad p_{U^\perp} \circ p_{U^\perp} = p_{U^\perp} \in \text{End}(V)$$

$$\text{--- " --- orthogonal, d.h. } p_U \circ p_{U^\perp} = 0 = p_{U^\perp} \circ p_U$$

$$\text{und } \text{id}_V = p_U + p_{U^\perp}.$$

$$\text{Sei } v \in V. \quad p_U \circ p_U(v) = p_U(\underbrace{p_U(v)}_{\in U}) \stackrel{(3)}{=} p_U(v)$$

$$p_U \circ p_{U^\perp}(v) = p_U(\underbrace{p_{U^\perp}(v)}_{\in U^\perp}) = 0$$

$$(6) \quad \forall v \in V: \quad \|p_U(v)\| \leq \|v\|.$$

$$\|v\|^2 = \|p_U(v) + p_{U^\perp}(v)\|^2 = \|p_U(v)\|^2 + \underbrace{\|p_{U^\perp}(v)\|^2}_{\geq 0} \geq \|p_U(v)\|^2$$

□

Satz: Sei V ein K -VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Sei $p_U: V \rightarrow U$ die orthogonale Projektion.

$$\Rightarrow \forall v \in V \forall u \in U: \|v - p_U(v)\| \leq \|v - u\|.$$

Beweis: $\|v - p_U(v)\|^2 \leq \underbrace{\|v - p_U(v)\|^2}_{\in U^\perp} + \underbrace{\|p_U(v) - u\|^2}_{\in U} = \|v - \cancel{p_U(v)} + \cancel{p_U(v)} - u\|^2 = \|v - u\|^2. \quad \square$

Bsp: $\mathbb{R}^3$, $U = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$, $U^\perp = \{\lambda_3 e_3 : \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad p_U(v) = \underbrace{\langle e_1, v \rangle}_{=v_1} e_1 + \underbrace{\langle e_2, v \rangle}_{=v_2} e_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

