

WIEDERHOLUNG

z.B.: $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[0], \dots, [p-1]\}$ (p Primzahl)

↓

Definition: Sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** ist eine Menge V gemeinsam mit Verknüpfungen $+: V \times V \rightarrow V$ und $\cdot: K \times V \rightarrow V$ so, dass gilt:

(1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.

- $\forall u, v, w \in V: (u+v)+w = u+(v+w)$
- $\exists 0 \in V \forall v \in V: v+0 = 0+v = v$
- $\forall v \in V \exists! -v \in V: v+(-v) = (-v)+v = 0$
- $\forall v, w \in V: v+w = w+v$

(2)

- $\forall \lambda \in K \forall v, w \in V: \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
- $\forall \lambda, \mu \in K \forall v \in V: (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\forall \lambda, \mu \in K \forall v \in V: (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $\forall v \in V: 1v = v$

Definition Seien V, W Vektorräume über einem Körper K . Eine Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ ist **linear** (oder: ein **(Vektorraum)homomorphismus**) wenn gilt:

- $\forall v, v' \in V: \varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$
- $\forall \lambda \in K \forall v \in V: \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Beispiele

- $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1, \dots, a_n \in K \right\}$ Spaltenvektoren
 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$
 $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen $K^n \rightarrow K^m$ gegeben durch $m \times n$ Matrizen:

Ist $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ so ist

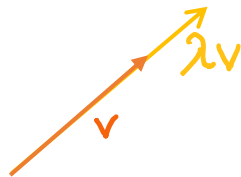
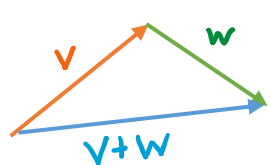
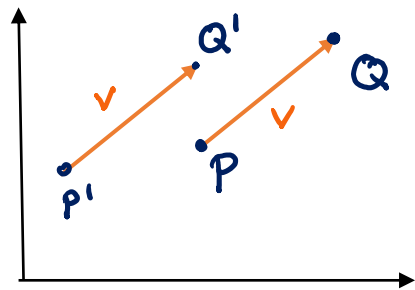
$$\varphi_C: K^n \rightarrow K^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Cx = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad \text{linear.}$$

Jede lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^m$ ist von dieser Form!

Analog: Zeilenvektoren, $n \times m$ Matrizen $M_{n \times m}(K)$, $K^{n \times m}$
 $M_{n,m}(K)$

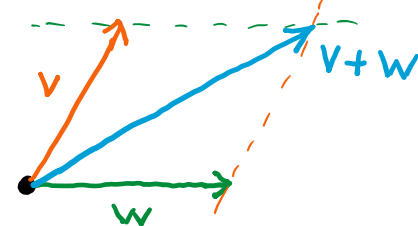
Beispiele

- Äquivalenzklassen von Pfeilen im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

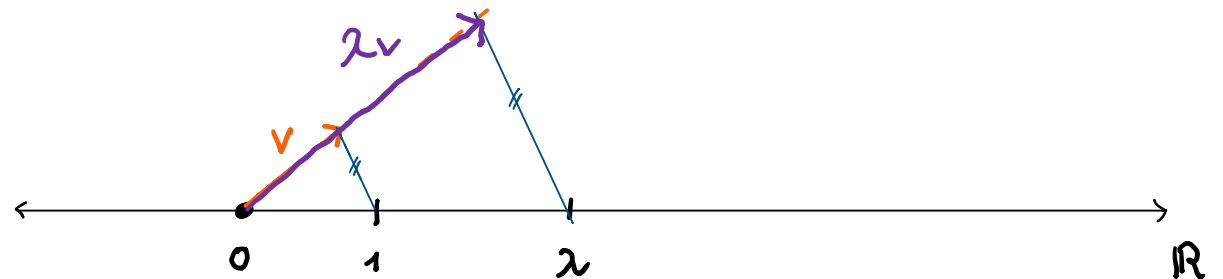


- Pfeile im $\mathbb{R}^n$ die in einem festen Punkt verankert sind:

ADDITION: Parallelogrammregel



SKALARMULTIPLIKATION: Strahlensatz



Achtung: Der Anschauungsraum $\mathbb{R}^n$ besitzt zusätzliche geometrische Struktur (Winkel, Längen,...)

Beispiele

- $C^n(a, b) = \{ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } n \text{ mal stetig differenzierbar} \} \quad (n \geq 0)$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$$\frac{d}{dx}: C^n(a, b) \rightarrow C^{n-1}(a, b), \quad f \mapsto \frac{df}{dx} \quad \text{ist linear} \quad (n \geq 1)$$

$$\int: C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx \quad \text{ist linear} \rightarrow \text{Funktionalanalysis}$$

- Polynome: $K[x] \ni f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

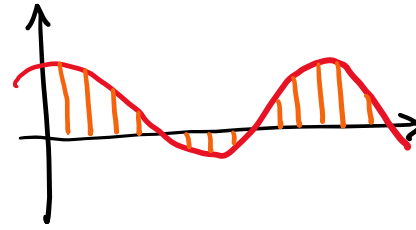
(o.B: $m=n$)

$$f+g = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

$$\lambda f = (\lambda a_n) x^n + \dots + (\lambda a_1) x + a_0$$

Beispiele

- Diskrete Zeitreihen, Signale, Messwerte, ...



- eine elektrische Spannung wird jede Sekunde für eine Minute gemessen:
 $u \in \mathbb{R}^{60}$
- ein Tonsignal wird 44.100 mal pro Sekunde abgetastet:
 $x \in \mathbb{R}^{44100}$ (für eine Sekunde)

- Codierungstheorie: $\varphi: \mathbb{F}_2^8 \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$, $n \geq 8$ injektiv.

$\text{Bi}(\varphi)$... Codewörter

Wie wählt man φ so dass man möglichst viele Übertragungsfehler erkennt?

Wie groß muss n sein um gewisse Fehler auszuschließen?

Basen

Sei V ein endlich-dimensionaler VR über einem Körper K .

Def: Eine (geordnete) **Basis** ist ein Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ mit $v_1, \dots, v_n \in V$, so dass gilt:

- Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig, d.h.

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K: \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \underline{\text{UND}}$$

- Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V , d.h.

$$\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K: v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Bem: • $n = \dim V$ ist eindeutig bestimmt

- Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$:

Bsp: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die Standardbasis (oder: kanonische Basis) des K^n .

$$\text{Es gilt: } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V

$$\Phi_{\mathcal{B}}: \begin{cases} K^n \longrightarrow V \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus und heißt
das durch $\mathcal{B}$ bestimmte **Koordinatensystem**.

Sei W ein weiterer VR mit Basis $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ und $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \uparrow \Phi_{\mathcal{B}} & & \uparrow \Phi_{\mathcal{B}'} \\ K^n & \xrightarrow{\quad} & K^m \\ x & \longmapsto & M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot x \end{array}$$

• Der Abb. φ ist eine $m \times n$ -Matrix

$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ zugeordnet:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) := \begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(v_i) = \mu_{1i} w_1 + \dots + \mu_{mi} w_i$$

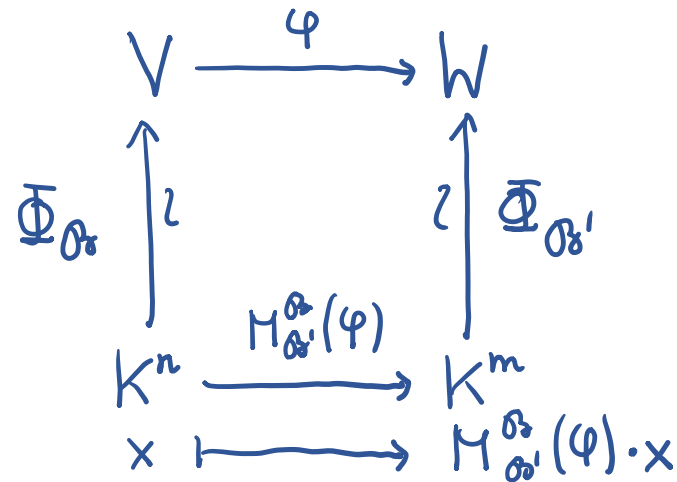
i -te Spalte: Koordinatenvektor von $\varphi(v_i)$
bzgl. $(w_1, \dots, w_m)$

Lineare Abbildungen als Matrizen

Satz: Seien V, W endlich-dim. VR mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$.
Dann gilt $\varphi = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ ($\Leftrightarrow \varphi \circ \Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$)

Man sagt:

Das Diagramm



ist kommutativ.

Achtung! „Notationsmissbrauch“: Für eine Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ bezeichnen wir auch die lineare Abbildung

$$\begin{cases} K^n \longrightarrow K^m \\ x \longmapsto Ax \end{cases} \text{ mit } A.$$

Hintereinanderausführung & Matrizenprodukt

Satz: Seien U, V, W endlich-dim. VR mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, und $\varphi: U \rightarrow V, \psi: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$ linear und es gilt:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$$

Matrixprodukt:

$\begin{matrix} \text{ik} \\ \text{Zeile} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{e1} & \dots & b_{em} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ c_{e1} & \dots & c_{en} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{ik} \\ \text{Zeile} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{e} \times \text{m} & \text{m} \times \text{n} & \text{e} \times \text{n} \end{matrix}$

$\nwarrow$ Matrixprodukt
 $\downarrow$ j-ke Spalte
 $\downarrow$ j-ke Spalte

mit
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} = b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \dots + b_{im} a_{mj}$$

Notation: $\text{Hom}(V, W) = \{ \varphi: V \rightarrow W : \varphi \text{ ist linear} \} = L(V, W)$

$\text{Hom}(V, V) \dots$ Algebra der Endomorphismen von V

Satz: Sei V ein n -dimensionaler VR mit Basis $\mathcal{B}$, und $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) φ ist ein Isomorphismus

(b) $\text{rang}(\varphi) = n$

(c) $\text{rang } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = n$

(c) Die Matrix $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar. D.h. es existiert eine Matrix $A^{-1} \in M_{n \times n}(K)$ mit $AA^{-1} = E_n \quad (\Leftrightarrow A^{-1}A = E_n)$

(Dann ist A^{-1} eindeutig bestimmt und heißt die zu A **inverse Matrix**)

- Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ nennt man
 - **regulär**, wenn $\text{rang } A = n$
 - **singulär**, wenn $\text{rang } A < n$.
- Sind $A, B \in M_{n \times n}(K)$ regulär, so ist auch AB regulär. Es gilt:

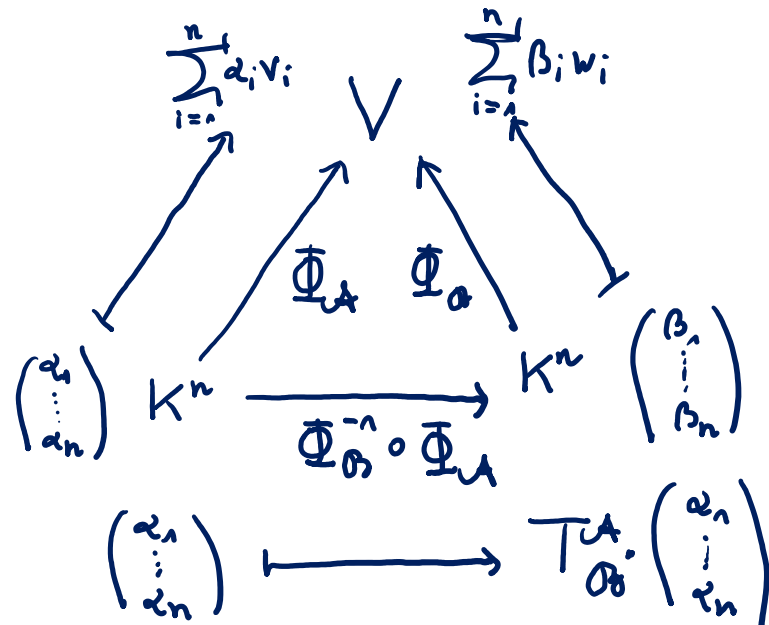
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$
- $GL_n(K) := \{A \in M_{n \times n}(K) : A \text{ ist regulär}\}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **allgemeine lineare Gruppe**.

Koordinatentransformation

Sei K ein Körper, V ein n -dimensionaler K -VR.

Ziel: Wir wollen verstehen wie sich Koordinatenvektoren bzw. Matrixdarstellungen bei einem Basiswechsel verändern.

Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V .



$$\text{Sei } V \ni v' = \alpha_1' v_1 + \dots + \alpha_n' v_n = \beta_1' w_1 + \dots + \beta_n' w_n$$

$$\text{Sei } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} \right) \quad \leftarrow \text{Standardbasis}$$

$$\Rightarrow T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_n' \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}(e_i) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} \text{ mit } v_i = t_{1i} w_1 + \dots + t_{ni} w_n.$$

D.h. Die i -te Spalte von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist $\underbrace{\begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}}_{\leftarrow i\text{-te Spalte von } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}}$ der Koordinatenvektor von v_i bzgl. $(w_1, \dots, w_n)$.

Satz: Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ Basen eines K -VR V .

Sei $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (t_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ die Matrix, deren i -te Spalte der Koordinatenvektor von v_i bezüglich $\mathcal{B}$ ist (d.h. $v_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} w_j$).

Für alle $v \in V$ gilt dann: Ist $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$ ($\alpha_i, \beta_i \in K$),

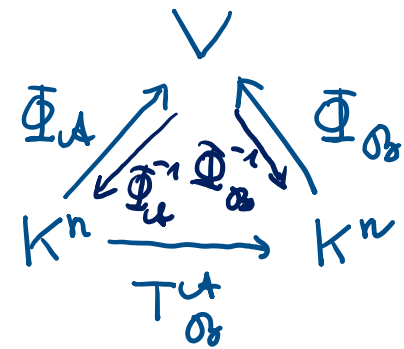
so ist
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Spezialfall: $V = K^n$ $\mathcal{A} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix}}_{v_1}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}}_{v_n} \right)$, $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix}}_{w_1}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} w_{n1} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{pmatrix}}_{w_n} \right)$

$A := [v_1 \dots v_n]$, $B := [w_1 \dots w_n] \in M_{n \times n}(K)$

$$\begin{array}{ccc} & K^n & \\ \Phi_{\mathcal{A}} = A \nearrow & & \nwarrow \Phi_{\mathcal{B}} = B \\ K^n & \xrightarrow{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = B^{-1}A} & K^n \end{array}$$

Lemma: Die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist invertierbar, und

$$(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$


Beweis: $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}})$ ist invertierbar, weil $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ ein Isomorphismus ist.

$$(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}((\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}})^{-1}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}) = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

□

Lemma: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V , so gilt $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$

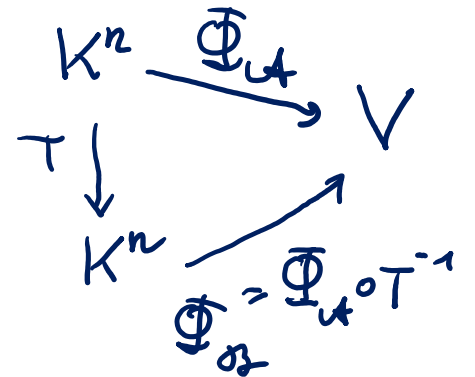
(Beweis als Übung)

Bemerkung: Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $T \in GL_n(K)$.
 Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = T$.

Beweis: Sei $\mathcal{B} = (\Phi_{\mathcal{A}}(T^{-1}e_1), \dots, \Phi_{\mathcal{A}}(T^{-1}e_n))$.

$\mathcal{B}$ ist eine Basis, denn $\Phi_{\mathcal{A}} \circ T^{-1}$ ist ein Isomorphismus.

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} \circ T^{-1} \Rightarrow \underbrace{\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}}_{= T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}} = T^{-1} \Rightarrow T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (T^{-1})^{-1} = T$$

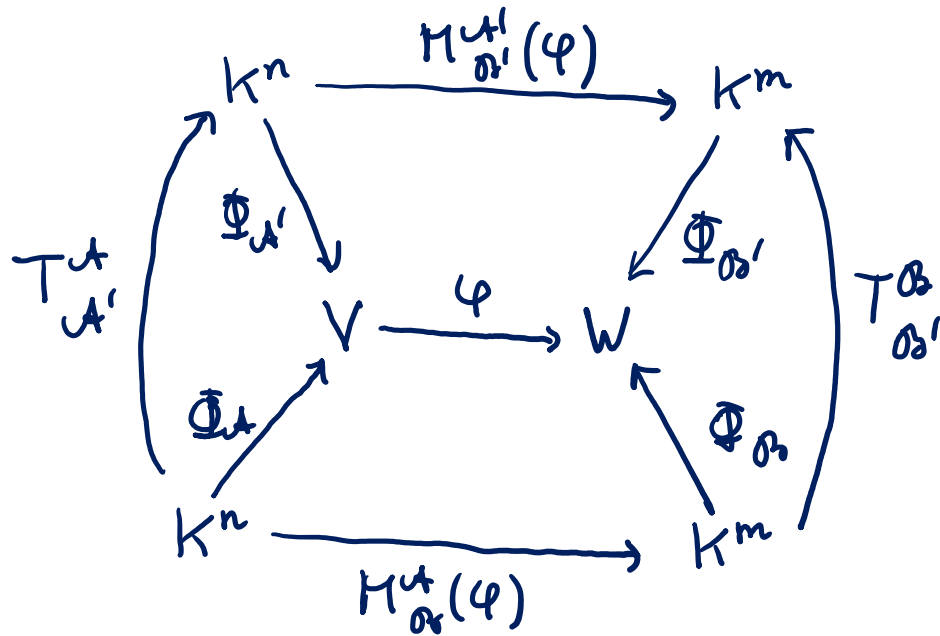


□

Koordinatentransformationen für Matrizen

Sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung (V, W endlich-dimensionale VR).

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W



Beh: $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) (T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}})^{-1}$ (*)

Bew: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{\mathcal{A}}$

$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{\mathcal{A}'}$

$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{A}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$, $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$

(*) = $\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \underbrace{\Phi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}}_{= \text{id}_{K^m}} \circ \varphi \circ \Phi_{\mathcal{A}} \circ (\Phi_{\mathcal{A}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}})^{-1}$

= $\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ \cancel{\Phi_{\mathcal{A}} \circ \Phi_{\mathcal{A}'}^{-1}} \circ (\Phi_{\mathcal{A}'}^{-1})^{-1} = \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{\mathcal{A}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi)$.

Satz (Transformationssatz)

Seien V, W endlich-dim VR, $\varphi: V \rightarrow W$ linear. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'})^{-1}$$

Anders ausgedrückt: Sind $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ und $M' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi)$ die beiden Matrizen, die φ bezüglich verschiedener Paare von Basen darstellen, und sind $T = T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$, $S = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrizen zwischen den verschiedenen Basen, so gilt

$$M' = S \cdot M \cdot T^{-1}$$

Korollar: Sei $\varphi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V .

Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1}$

Anders ausgedrückt: $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$

wenn $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $S = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

Definition:

- Zwei Matrizen $A, B \in M_{\underline{m \times n}}(K)$ heißen "äquivalent", wenn es $S \in GL_m(K)$ und $T \in GL_n(K)$ gibt mit

$$B = SAT^{-1}$$

- Zwei Matrizen $A, B \in M_{\underline{n \times n}}(K)$ heißen "ähnlich", wenn es ein $S \in GL_n(K)$ gibt mit

$$B = SAS^{-1}$$

Bemerkung:

- $A, B \in M_{m \times n}(K)$ sind äquivalent $\Leftrightarrow A, B$ beschreiben bzgl. verschiedener Paare von Basen die gleiche lineare Abbildung
- $A, B \in M_{n \times n}(K)$ sind ähnlich $\Leftrightarrow A, B$ beschreiben bzgl. verschiedener Basen den gleichen Endomorphismus